



# Etudes autour des anisotropies du corps noir cosmologique et des amas de galaxies

Olivier Dore

## ► To cite this version:

Olivier Dore. Etudes autour des anisotropies du corps noir cosmologique et des amas de galaxies. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT: . tel-00003122

**HAL Id: tel-00003122**

**<https://theses.hal.science/tel-00003122>**

Submitted on 14 Jul 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Présentée pour obtenir le titre de

**Docteur de l'Université**

Spécialité : *Physique Théorique*

par

**Olivier DORÉ**

<p><b>ÉTUDES AUTOUR DES ANISOTROPIES DU CORPS NOIR COSMOLOGIQUE ET DES AMAS DE GALAXIES</b></p>
---

Soutenue le 21 décembre 2001, devant le Jury composé de :

M.	Pierre ENCRENAZ	<i>Président</i>
M.	Jim BARTLETT	<i>Rapporteur</i>
M.	J. Richard BOND	<i>Rapporteur</i>
M.	François R. BOUCHET	<i>Directeur de thèse</i>
M.	Yannick MELLIER	<i>Examineur</i>
M.	Jean-Loup PUGET	<i>Examineur</i>
M.	Joe SILK	<i>Examineur</i>
M.	Nicola VITTORIO	<i>Examineur</i>



# Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Présentée pour obtenir le titre de

**Docteur de l'Université**

Spécialité : *Physique Théorique*

par

**Olivier DORÉ**

<p><b>ÉTUDES AUTOUR DES ANISOTROPIES DU CORPS NOIR COSMOLOGIQUE ET DES AMAS DE GALAXIES</b></p>
---

Soutenue le 21 décembre 2001, devant le Jury composé de :

M.	Pierre ENCRENAZ	<i>Président</i>
M.	James BARTLETT	<i>Rapporteur</i>
M.	J. Richard BOND	<i>Rapporteur</i>
M.	François R. BOUCHET	<i>Directeur de thèse</i>
M.	Yannick MELLIER	<i>Examineur</i>
M.	Jean-Loup PUGET	<i>Examineur</i>
M.	Joe SILK	<i>Examineur</i>
M.	Nicola VITTORIO	<i>Examineur</i>





*A Paula,  
pour avoir su transformer  
tout cela en bonheur*



*A mes parents,  
et à mes grand-parents,  
pour qui un tel luxe n'existait pas*



*Désordre du temps passé,  
Moi, pour dissiper la nuit,  
J'ai risqué tout mon sommeil.*

Paul Eluard



# Remerciements

*L*e chemin aventureux parcouru au cours d'une thèse, chemin d'apprentissage à la recherche mais pas seulement, ne peut s'effectuer seul. Le savoir ne suffit pas et il m'est bon d'exprimer, maintenant, même maladroitement, ma sincère gratitude à l'encontre de certaines personnes qui ont contribué à son aboutissement.

À tout le personnel de l'Institut d'Astrophysique de Paris, tout d'abord, pour l'atmosphère qu'ils y créent, et tout spécialement aux zélés membres du service informatique pour leur aide répétée. Au directeur de l'Institut, Bernard Fort, pour m'en avoir ouvert les portes dans une situation exceptionnelle, puis, pour m'avoir encouragé en témoignant d'un intérêt constant à mes travaux.

À Richard Taillet, mais aussi tout particulièrement à Pierre Salati, dont la pure bienveillance m'a aidée dans un passage délicat. Rien ne les obligeait à ce soutien. Je ne peux donc que leur rappeler ma profonde reconnaissance.

François Bouchet a su me faire confiance après notre première rencontre. Il a su aussi, par la suite, diriger mes recherches, et, sans répit, enrichir mon existence scientifique de nouvelles idées et opportunités stimulantes. A sa disponibilité, à son soutien, à son sens physique, à son énergie volcanique, à l'estime qu'il m'a porté, à sa personne tout simplement, la joie et l'enthousiasme qui m'habitent depuis que j'ai commencé à travailler à l'IAP doivent beaucoup. Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

Yannick Mellier m'a accueilli également au sein de son équipe. Son amicale et patiente disponibilité m'ont dévoilé un pan de connaissances jusqu'alors inconnues. De cette initiation, il me reste le désir de l'explorer plus encore, et je l'en remercie très amicalement.

Il serait injuste de ne pas mentionner maintenant Haitham Zaraket, à qui je dois un cher et fidèle soutien. Qu'il recoive ce gage supplémentaire d'amitié et qu'il le partage abondamment avec le nouvel Haitham.

Enfin, les divers travaux présentés dans ce mémoire de thèse doivent beaucoup à la qualité de mes collaborateurs : Stéphane Colombi, François-Xavier Désert, Sergio Dos Santos, Pablito Fosalba, Eric Hivon, Lloyd Knox, Alan Peel, Simon Prunet, Romain Teyssier et Didier Vibert. J'ai bénéficié de la grande et généreuse compétence de chacun. Je souhaiterai remercier tout particulièrement Romain Teyssier dont la précieuse disponibilité n'a cessé de m'enrichir. Mes travaux ont tous profité, d'une manière ou d'une autre, tant de l'acuité de son esprit que de ses compétences physiques et numériques.



Par ailleurs, un travail soutenu n'étant pas sans conséquences nerveuses plus ou moins répressibles et...repréhensibles, je me dois de remercier l'ensemble de mes camarades de bureaux : les "9ers" tout d'abord, Julie, Bastien et Emmanuel, puis Pablito Fosalba et Lucio Marassi pour les quelques exhubérances qu'ils ont bien voulu supporter.

J. Richard Bond et Jim Bartlett ont accepté d'être les premières victimes de mon penchant certain pour les phrases longues et inversées; Yannick Mellier, Jean-Loup Puget, Joe Silk et Nicola Vittorio de participer à mon jury de thèse; Pierre Encrenaz de le présider, qu'ils en soient tous vivement remerciés.

Finalement, malgré mon indisponibilité chronique, ma famille m'a toujours offert ses encouragements constants et un soutien rare et dévoué. J'aimerai les en remercier et leur signifier, en retour, que tout ceci leur appartient nécessairement un peu.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Résumé</b>	<b>17</b>
<b>Summary</b>	<b>19</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>21</b>
Un Univers proche formé hiérarchiquement . . . . .	21
Besoin d'un au delà . . . . .	28
Le rayonnement cosmologique millimétrique . . . . .	30
Tester ce scénario et le contraindre . . . . .	36
Présentation de la thèse . . . . .	37
 <b>I Analyse de données CMB</b>	 <b>43</b>
<b>1 Analyse de données CMB : une introduction</b>	<b>45</b>
1.1 Mesures des paramètres cosmologiques et requêtes observationelles	45
1.2 Expériences présentes et futures . . . . .	46
1.2.1 Les instruments en service . . . . .	46
1.2.2 L'instrument PLANCK HFI . . . . .	48
1.3 Les données : modélisation et traitement . . . . .	50
1.3.1 Modèle de flot temporel . . . . .	50
1.3.2 Traitement des données . . . . .	51
1.3.3 Attentes et déceptions . . . . .	58
 <b>Bibliographie</b>	 <b>59</b>
<b>2 De la fabrication de cartes...</b>	<b>61</b>
2.1 D'un choix théoriquement motivée : une méthode à la <i>COBE</i> ...	62
2.2 ...aux difficultés de leur implémentation... . . . . .	65
2.3 ...à leur solution : une approche itérative multi-grille. . . . .	66
2.4 Applications sur des simulations . . . . .	73
2.5 Des estimations du bruit . . . . .	75
2.6 Discussions . . . . .	78

<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>
<b>3 ...à une extraction <i>hiérarchique</i> du spectre de puissance</b>	<b>93</b>
3.1 Principes de la <i>décomposition hiérarchique</i> . . . . .	94
3.2 Mise en oeuvre . . . . .	97
3.3 Applications et Perspectives pour les cartes megapixels . . . . .	99
3.4 Discussions . . . . .	101
3.4.1 Extensions . . . . .	105
<b>Bibliographie</b>	<b>106</b>
<b>4 Une description analytique des effets de lobe instrumental</b>	<b>109</b>
4.1 Effets d'un lobe primaire elliptique : une approche analytique . .	110
4.2 Applications et discussions . . . . .	115
4.3 D'une prise en compte effective de cet effet, à la reconstruction du lobe lointain. . . . .	121
<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>5 Non-Gaussianité et Courbure</b>	<b>129</b>
5.1 Principes et définitions analytiques . . . . .	132
5.2 Un estimateur de non-Gaussianité . . . . .	138
5.3 Discussion et perspectives . . . . .	141
<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>
<b>II Amas de galaxies : Physique et Observation</b>	<b>149</b>
<b>6 Les amas de galaxies : physique et observation</b>	<b>151</b>
6.1 De quelques caractéristiques nécessaires... . . . .	151
6.2 ...à une modélisation plus empirique mais efficiente . . . . .	153
6.3 Observations pertinentes . . . . .	154
<b>Bibliographie</b>	<b>156</b>
<b>7 Chocs et paliers d'entropie : un modèle unificateur pour les groupes et les amas de galaxies.</b>	<b>157</b>
7.1 De l'apparente simplicité d'un univers hiérarchique . . . . .	158
7.2 Un modèle unissant les groupes et les amas . . . . .	161
7.3 Prédictions pour les relations d'échelles . . . . .	165
7.4 Discussions et perspectives . . . . .	168
<b>Bibliographie</b>	<b>172</b>

<b>8</b>	<b>Distorsions gravitationnelles et effet Sunyaev-Zel'dovich : une analyse conjointe</b>	<b>175</b>
8.1	Motivations et nécessités . . . . .	176
8.2	Principes généraux . . . . .	178
8.3	Validation sur des simulations numériques . . . . .	184
8.4	Accomplissement, limites et perspectives . . . . .	185
	<b>Bibliographie</b>	<b>190</b>
	<b>Conclusions</b>	<b>193</b>
<b>III</b>	<b>Publications</b>	<b>195</b>
.1	Fabrication rapide de cartes . . . . .	197
.2	Mesure du spectre de puissance . . . . .	213
.3	Lobe instrumental elliptique et mesure de l' intensité totale et de la polarisation du CMB . . . . .	225
.4	Non-Gaussianité et Courbure . . . . .	245
.5	Compétition entre chocs et palier d'entropie . . . . .	259
.6	Physique des amas à partir d'observations WL et SZ . . . . .	283



# Résumé

*L*e paradigme cosmologique actuel s'appuie sur l'instabilité du modèle de Friedman-Lemaître vis-à-vis des inhomogénéités de densité d'énergie, pour rendre compte de la formation des grandes structures de l'Univers, telles que nous les observons. Dans ce cadre, il a été prédit, puis observé, que ces nécessaires inhomogénéités impriment sur un rayonnement fossile millimétrique (CMB), par ailleurs thermalisé à 3K, homogène et isotrope, d'infimes variations de température. Par l'observation plus précise de telles anisotropies, de nombreuses expériences présentes ou à venir, telles ARCHEOPS, TopHat, ou PLANCK, espèrent tester ce paradigme avec une précision sans précédent. Toutefois, les besoins inédits de ces expériences nécessitent l'invention de nouvelles méthodes d'analyse de données CMB. En réponse à certains de ces besoins, nous avons développé au cours de notre thèse, *une méthode multi-grille originale de fabrication rapide de cartes de ces fluctuations de température à partir de données ordonnées en temps, une méthode hiérarchique de mesure du spectre de puissance angulaire de ces cartes, une modélisation analytique des effets de lobe instrumental, et un test original de détection d'une composante non-Gaussienne dans la distribution statistique de ces fluctuations.*

Par ailleurs, regardant ces inhomogénéités bien plus tardivement dans leur évolution, nous pouvons observer, entre autres grandes structures, **des amas de galaxies**. À ces objets, les plus massifs gravitationnellement liés aujourd'hui, nous nous sommes intéressé dans un second temps. En particulier, nous avons construit *un modèle analytique permettant l'inclusion d'effets de chauffage non-gravitationnel*, connus par leurs conséquences observationnelles importantes. Enfin, nous avons présenté une méthode permettant une meilleure description du contenu baryonique de ces amas au moyen d'*une analyse conjointe d'observations de distorsions gravitationnelles, de l'effet Sunyaev-Zel'dovich, et de l'émission X*, ces deux derniers effets originant du gaz chaud contenu dans les amas.



# Summary

In order to account for the formation of the well known large scale structures of the Universe, the current cosmological paradigm relies on the instability of the Friedman-Lemaître model with respect to inhomogeneities in the energy density. In this theoretical framework, these inhomogeneities have been predicted, and later observed, to give rise to temperature anisotropies in a millimetric cosmological background radiation (CMB), otherwise thermalized at 3K, which is homogeneous and isotropic. By observing these anisotropies with ever increasing higher sensitivity, present and future CMB experiments like ARCHEOPS, TopHat or PLANCK, hope to test this paradigm with tantalizing precision. However, these experiments entail some unprecedented **data-analysis challenges**. To overcome some of these issues, we developed *a fast multigrid algorithm for making maps of temperature fluctuations from time-ordered data, a power spectrum estimation algorithm via hierarchical decomposition, an analytical modeling of the effects induced by an axisymmetric instrumental beam and an original and sensitive statistic to detect a would-be non-Gaussian component in the statistical distribution of these fluctuations.*

Furthermore, looking further down in time at these inhomogeneities, we can distinguish **clusters of galaxies** amid large scale structures. We also studied these systems, the largest gravitationally bound systems today. In particular, we developed *an analytic model that allows to take into account a non-gravitational heating*, whose observational consequences are important. At last, we were able to describe in a more satisfying manner the baryonic content of these clusters by making use of *a joint analysis of gravitational distortion observations and, Sunyaev-Zel'dovich effect and X-ray emission measurements*, both originating from the hot intra-cluster gas.





# Introduction

*Chacun appelant idées claires celles qui sont au même degré de confusion que les siennes propres.*

Marcel Proust, *A l'ombre des jeunes filles en fleurs*

Nous le savons maintenant, l'instabilité gravitationnelle permet de décrire, dans une grande mesure, la formation récente ( $z \lesssim 7$ ) des grandes structures de l'Univers<sup>1</sup> telles que nous les observons quotidiennement : une “*toile cosmique*” en expansion ; toile composée d'amas, de filaments, de nappes, et structurée autour de vides ; toile ponctuée de galaxies qui semblent en être l'élément unitaire.

## Un Univers proche formé hiérarchiquement

La pierre d'achoppement du paradigme cosmologique contemporain, paradigme qui formera notre cadre théorique, est le *principe cosmologique* d'Einstein [1], stipulant que l'Univers est proche de l'homogénéité et de l'isotropie. Ce principe semble sans cesse conforté observationnellement par les comptages d'objets à grande échelle<sup>2</sup>, mais aussi, et peut-être plus encore, par l'isotropie du fond diffus micro-onde<sup>3</sup>.

Rappelant d'abord, brièvement, les quantités clefs caractéristiques du modèle relativiste découlant de ce principe, le modèle de Friedman-Lemaître, nous évoquerons ensuite ses conséquences observables dans l'Univers proche. Des difficultés de l'interprétation cosmologique de ces observations, nous déduirons un besoin d'au-delà.

---

<sup>1</sup>Disons, arbitrairement, d'une taille caractéristique  $\gtrsim 1/2 h^{-1}$  Mpc aujourd'hui, où  $h$  est défini en Eq. 9.

<sup>2</sup>Notons tout de même que ces comptages illustre plus l'isotropie que l'homogénéité car l'homogénéité n'est atteinte qu'au prix d'un lissage avoisinant la taille de la région d'espace explorée.

<sup>3</sup>Dans cette partie, comme tout au long de cette thèse, nous nous appuyons amplement sur de nombreux ouvrages de référence, plus généraux, figurant dans la bibliographie de cette partie. Tous de grande qualité, ils mériteraient bien mieux qu'une citation en note de bas de page [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

## Le modèle de Friedman-Lemaître

Formulé dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale, ce principe conduit à une métrique d'espace-temps de type Robertson-Walker :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\theta^2 + x^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1)$$

où  $k$  est une constante dont dépend la courbure des sections spatiales de cette métrique (à  $k = 0$  correspond un espace plat, à  $k < 0$  un espace hyperbolique, et à  $k > 0$  un espace parabolique) et  $a(t)$  est un facteur d'expansion. À ce niveau, ce dernier facteur n'est pas spécifié, et seules des hypothèses supplémentaires sur le contenu en matière de l'Univers et l'usage des équations d'Einstein le permettront. Ces dernières mènent en effet aux équations d'évolution de  $a$  suivantes,

$$3\ddot{a} = -4\pi G\rho(1 + 3w)a + \lambda a \quad (2-a)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{8\pi G}{3} \rho a^3 - ka + \frac{\lambda a^3}{3} \right) \quad (2-b)$$

où l'on a supposé un fluide de densité  $\rho$ , et de pression (nécessairement isotrope)  $p$ , et où l'on a autorisé l'existence d'une constante cosmologique non nulle,  $\lambda$ .  $G$  désigne la constante de Newton.

Nous distinguerons les fluides ultra-relativistes (photons  $\gamma$ , neutrinos  $\nu \dots$ ), ou "*rayonnement*", pour lesquels on peut écrire l'équation d'état <sup>4</sup> reliant, pression et densité,

$$p = \frac{1}{3}\rho, \quad (3)$$

et la "*matière*" (poussière sans pression) pour laquelle

$$p = 0. \quad (4)$$

Des relations de conservation de l'énergie découlent également de l'équation d'Einstein. Appliquée à chaque composante séparément elle donne :

$$\rho_{rayon.} \propto a^{-4} \quad (5-a)$$

$$\rho_{mat.} \propto a^{-3}. \quad (5-b)$$

Un bref regard à l'équation 2 nous montre que, successivement, les termes  $k$ ,  $\rho$  puis  $\lambda$  vont dominer  $\dot{a}^2$ , *i.e.* une domination par la courbure, le fluide cosmique (matière plus rayonnement) et la constante cosmologique. Si l'on considère  $k = 0$ , on peut distinguer trois régimes, où successivement la constante cosmologique, le rayonnement et la matière dominent <sup>5</sup>.

<sup>4</sup>De manière générale, on peut supposer qu'il existe une équation d'état  $p = w\rho$ . Si l'on désire interpréter  $\lambda$ , par exemple, comme un fluide cosmique, alors il satisfait l'équation  $\rho_\lambda = -p_\lambda = \lambda/(8\pi G)$ . Il s'agit alors de "l'équation d'état de l'énergie sombre", dont une solution peut-être un modèle de type Quintessence. Cette énergie est alors l'énergie cinétique et potentielle d'un champ scalaire descendant son potentiel.

<sup>5</sup>Ces lois ne seront donc vérifiées ni pendant les périodes de transition, ni pour le fluide cosmique dans son ensemble.

Dans une période *dominée par le rayonnement*, on obtient

$$a(t) \propto t^{1/2} , \quad (6)$$

alors que l'on a dans une période *dominée par la matière*,

$$a(t) \propto t^{2/3} . \quad (7)$$

enfin, dans une période éventuellement dominée par une constante cosmologique, on obtient

$$a(t) \propto \exp(\sqrt{\frac{\lambda}{3}} t) . \quad (8)$$

La période de transition entre l'ère de domination par le rayonnement et celle dominée par la matière, *l'équivalence*, jouera un grand rôle par la suite.

Notons enfin - ce qui sera amplement utilisé ultérieurement - que si l'on définit la constante de Hubble par

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = 100 \, h \, \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} , \quad (9)$$

où  $h$  est un nombre sans dimension, alors, la densité de matière "critique"  $\rho_c$ , définie comme étant la densité de matière donnant une courbure d'espace plate en l'absence de constante cosmologique est,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} . \quad (10)$$

Si l'on note, par ailleurs, les quantités

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} , \quad \Lambda = \frac{\lambda}{3H^2} \quad \text{et} \quad \Omega_c = -\frac{k}{\dot{a}^2} , \quad (11)$$

alors, on obtient directement de l'équation 2 la forme usuelle,

$$\Omega + \Lambda + \Omega_c = 1 , \quad (12)$$

où sont estimées les contributions relatives des différentes sources d'énergie, *i.e.* de la matière (ou plutôt du fluide cosmique), de la constante cosmologique (du vide) et de la courbure.

Notons enfin qu'avec cette définition, il sera utile de définir le décalage entre une fréquence mesurée et la fréquence au repos, décalage vers le rouge puisqu'induit par l'expansion. On le notera

$$z = a_0/a - 1 , \quad (13)$$

où  $a_0$  est le facteur d'expansion aujourd'hui.

## Formation des structures dans un modèle CDM

La compréhension de la formation des structures observées dans l'Univers proche, disons  $z \lesssim 7$ , exploite l'instabilité générique du modèle de Friedman-Lemaître vis à vis de toute perturbation de densité de matière (ou de rayonnement). Ses conséquences sont les suivantes.

Pour étudier l'amplitude et la croissance des fluctuations, on étudie en général l'excès de masse contenu dans une sphère de rayon  $R$  comobile<sup>6</sup>. L'amplitude des fluctuations est alors quantifiée par la déviation standard (rms) du champ de densité (de matière pour nous) lissé par un créneau sphérique de rayon  $R$ , auquel correspond naturellement une échelle de masse  $M = 4/3\pi\bar{\rho}(R/2)^3$  où  $\bar{\rho}$  est la densité moyenne. Nous choisirons donc de décrire l'amplitude de ces fluctuations par le biais de la quantité,  $\delta = \delta M/M$ , fonction de  $M$ .

Pourvu que l'on considère que la *densité d'énergie de matière* soit dominée par une *composante non-baryonique "noire"* (DM), sans couplage fort avec la matière ordinaire (hormis par gravitation) et initialement froide (CDM, pour "Cold Dark Matter" en anglais)<sup>7</sup> alors il est possible de décrire simplement, et de façon adéquate<sup>8</sup>, l'évolution de perturbations de matière à partir d'un spectre initial de type Harrison-Peebles-Zel'dovich,  $\delta \propto M^{-2/3}$  qui, comme nous le verrons, est un spectre naturel dans les scénarios de type inflationnaire ou de type défauts topologiques.

Une échelle de masse importante pour la croissance de ces fluctuations est naturellement celle "entrant sous l'horizon" au moment de l'équivalence, *i.e.* à  $z_{eq} = 2.5 \times 10^4 (\Omega h^2)$  :  $M_{eq} = 2 \times 10^{15} (\Omega h^2) M_\odot$ . Le changement du régime d'expansion (Eq.6 et 7) ne peut qu'affecter la croissance des fluctuations. En effet, alors que les fluctuations croisant l'horizon avant l'équivalence, *i.e.* pendant l'ère de domination par le rayonnement, croîtront au mieux en  $\ln a$ <sup>9</sup>, toutes les fluctuations de matière croisant l'horizon après l'équivalence auront une croissance  $\propto a$ , même si celles de masse inférieure à la masse de Jeans<sup>10</sup>, *i.e.* la masse en deçà de laquelle la pression peut contrecarrer la gravitation, verront leur amplitude amortie en  $1/\sqrt{a}$ . L'équivalence imprime donc une échelle très caractéristique sur le spectre des fluctuations après l'équivalence :  $\delta M/M$  est une fonction décroissante de  $M$ , mais, contrairement au spectre initial de

<sup>6</sup>Les coordonnées comobiles sont celles de la métrique d'espace-temps Eq. 1. Le passage aux distances propres nécessite la prise en compte du facteur d'expansion  $a(t)$ .

<sup>7</sup>Matière froide dans le sens où sa dispersion de vitesse initiale est faible devant le flot de Hubble.

<sup>8</sup>En fait, la faible masse des particules candidates CDM nous autorise à négliger leur *masse de libre flot*,  $M_{LF}$ , masse en deçà de laquelle toutes les fluctuations sont supprimées par diffusion des particules de matière froide lorsqu'elles sont encore relativistes, *i.e.* lorsque  $M \leq M_{LF} = 10^{11} M_\odot (\Omega h^2) ((m_{DM} c^2)/(1\text{keV}))^{-4}$ .

<sup>9</sup>En fait, elles seront tout d'abord effacées par le libre flot des neutrinos si elles croisent l'horizon avant le découplage des neutrinos à  $z_\nu = 3 \times 10^9$ , les fluctuations restantes de masse inférieure à la masse de Jeans, entreront dans un régime d'oscillation acoustique amorti en  $1/\sqrt{a}$ , et certaines fluctuations resteront constantes (solution constante de l'équation dynamique)

<sup>10</sup>Même si la pression du fluide constitué de matière noire est négligeable, un support équivalent est assuré par le phénomène de relaxation violente [9], si bien que la masse de Jeans demeure définie.

Harrison-Peebles-Zel'dovich, très plate pour  $M < M_{eq}$  et rejoignant le spectre initial au delà.

Ce simple fait fonde le scénario hiérarchique. En effet, à toute échelle de masse  $M$ , les effets non-linéaires prennent le dessus sur le flot de Hubble lorsque les fluctuations de matière  $\delta M/M$  approchent l'unité. Alors, ces fluctuations se découplent de l'expansion avant de s'effondrer puis de se virialiser. Aussi, dans ce scénario de matière sombre froide, les fluctuations de faible masse deviendront non-linéaires tout d'abord, et leur effondrement précédera celui de fluctuations de masse plus importante, à l'intérieur desquelles elles sont "amassées". La non-linéarité se propage ainsi des petites échelles vers les grandes, donnant naissance à une *hiérarchie de structures emboîtées*.

## Formation et observation des structures baryoniques

Le pendant baryonique de ce scénario possède une subtilité supplémentaire : quand bien même nous venons d'utiliser le fait que dans l'ère de matière les fluctuations de matière peuvent croître, cela supposait implicitement la seule interaction par la gravitation. Or, les baryons, alors principalement sous forme d'un plasma Coulombien composé de neutrons, de protons et d'électrons, se trouvent liés par diffusion Thomson aux photons du fluide radiatif jusqu'au découplage. De fait, jusqu'à peu avant cet instant, la longueur de diffusion Thomson est supérieure à tous les modes d'une longueur d'"intérêt cosmologique" aujourd'hui ( $\geq 0.5 h^{-1}$  Mpc), si bien qu'alors les baryons "suivent" les photons.

Aussi, des considérations précédentes découlent qu'aucune perturbation baryonique (d'intérêt) n'a pu croître jusqu'à l'instant du *découplage*<sup>11</sup>, à  $z_{dec.} \sim 1100$ , où la longueur de diffusion des photons atteint l'horizon de Hubble (ces photons se propageant alors librement constitueront le fond millimétrique cosmologique sur lequel nous reviendrons ci-dessous). Or, si ces perturbations croissaient, seules, depuis cet instant seulement, nous ne pourrions justifier l'existence du niveau des fluctuations de masse baryoniques observées aujourd'hui. L'argument permettant de contourner ce problème consiste à supposer que la matière sombre, dominante par rapport à la matière "ordinaire", est essentiellement non-baryonique, et donc sans interaction avec les photons. Elle aurait donc pu croître *avant* le découplage. On peut montrer, alors, qu'après le découplage, les perturbations baryoniques croissent rapidement jusqu'à rattraper les perturbations non-baryoniques ce qui résout bien notre problème (les baryons tombent dans les puits de potentiel de la matière sombre). Notons que cette profonde nécessité constitue un argument très fort en faveur d'une nature non-baryonique de la matière froide.

Nous pouvons donc bien également parler d'une formation hiérarchique des structures baryoniques depuis l'époque du découplage. La première structure à s'effondrer correspond naturellement à la masse de Jeans au moment du découplage<sup>12</sup> :  $M_{bar.}^{Jeans} \sim 10^6 \Omega_{bar.} \Omega^{-3/2} h^{-1} (T_{bar.}/T)^{3/2} M_{\odot}$ , où l'on a écrit

<sup>11</sup>Cette époque est concomitante à l'époque de la *recombinaison*, où les électrons se combinent avec les nucléons afin de former des atomes, hydrogène et hélium.

<sup>12</sup>Une formulation équivalente de l'importance du passage de l'équivalence pour les ba-

$\Omega = \Omega_{bar.} + \Omega_{DM}$ . Demeure toutefois une difficulté : pour peu qu'il n'y ait, par la suite, aucune *ségrégation* possible entre matière noire froide (CDM) et baryons, ces sous-structures seraient irrémédiablement perdues au moment de la virialisation des structures plus massives les incluant. Nous serions alors dans l'incapacité d'expliquer l'existence de galaxies aujourd'hui : nous verrions plutôt des objets lumineux, plus rares mais plus massifs, d'une taille juste inférieure à celle des amas aujourd'hui,  $\simeq 100 h^{-1}$  kpc.

Fortuitement, cette ségrégation apparaît naturellement dès lors que l'on autorise les baryons à dissiper leur énergie thermique, laquelle provient essentiellement, comme nous le verrons au chapitre 7, de la conversion par des chocs de leur excès d'énergie cinétique acquis lors de leur effondrement. Cette dissipation<sup>13</sup> permet la *condensation* de ces baryons bien avant l'effondrement des fluctuations de masse supérieure [10, 11]. Les halos de ces objets condensés seront détruits pendant la virialisation de l'échelle de masse supérieure, mais le coeur, baryonique, compact et lumineux, survivra à ce stade et deviendra une sorte de *fossile* de l'échelle de masse ayant précédemment été virialisée. Ces fossiles continueront à croître, et à fusionner pour former les ponctuations de la toile cosmique : les galaxies.

Ces considérations, sciemment simplifiées ici, sont résumées clairement au moyen de la figure 1 empruntée à [12]<sup>14</sup>. Y est représenté la densité baryonique,  $n_b$ , en fonction de la température,  $T$ , pour des structures de différentes masses. Les fines lignes diagonales descendantes représentent des lignes de masse constante,  $M$ , mais de contraste de densité,  $\delta M/M$ , variable. Les courbes diagonales, épaisses, et ascendantes, indiquent les contrastes de densité 0.5, 2 et 3  $\sigma$ , où  $\sigma$  est la déviation standard des fluctuations originant d'un spectre de fluctuation de matière (CDM) de Harrison-Zel'dovich pour une cosmologie ( $\Omega = 1$ ,  $h = 0.5$ ) pour la ligne continue, et ( $\Omega = 0.2$ ,  $h = 1.0$ ) pour la ligne pointillée. La densité de gaz indiquée correspond à des *proto-condensats* virialisés mais, *non refroidis et donc non condensés*.

Ont été placés également, des groupes et amas du catalogue CfA (points pleins en haut à droite), différentes galaxies individuelles (zones hachurées) ainsi que des galaxies sphéroïdes naines (points vides ou pleins, en bas à gauche).

Les courbes fines en cloche, *courbes de refroidissement* incluant les modèles de dissipation radiative précédemment mentionnés (avec une métallicité solaire ou nulle), séparent le plan  $n_b - T$  en deux. Dans la partie inférieure, le temps dynamique,  $t_{dyn}$ , est supérieur au temps de refroidissement,  $t_{cool}$ , si bien que le gaz aurait eu le temps de se refroidir, alors que l'opposé est vrai dans la partie supérieure. Si le refroidissement entrerait en jeux, le gaz se concentrerait, si bien que les structures placées descendraient vers le bas. Si le gaz avait le temps de

---

ryons consiste à calculer la masse de Jeans des baryons, avant et après, et à constater son effondrement.

<sup>13</sup>Dissipation radiative due essentiellement, selon la température et la densité baryonique, à l'émission de type "bremsstrahlung thermique", à l'émission induite par excitation collisionnelle atomique, ou bien à la diffusion Compton sur un fond diffus de photons.

<sup>14</sup>Notons, pour être juste, que cette figure a été tracée pour la première fois en [13], et que la revue [12] s'appuie grandement sur des travaux pionniers antérieurs [14, 10, 11], que nous nous devons de citer explicitement ici.

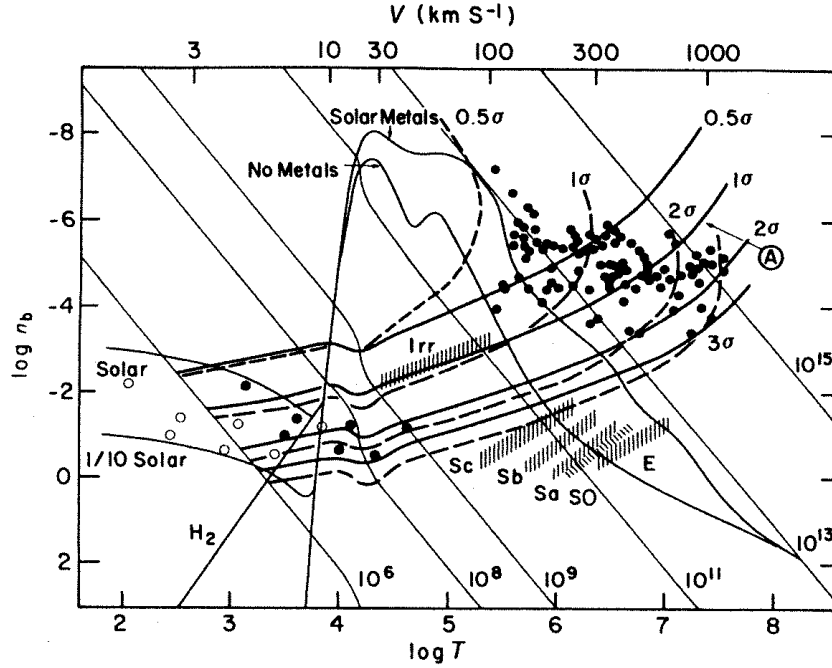


FIG. 1  
Densité de baryons,  $n_b$ , en fonction de la température,  $T$ , pour différentes structures. Voir texte. Tiré de [12].

se condenser suffisamment, le refroidissement deviendrait de plus en plus efficace et son effondrement ne s'arrêterait, alors, que par une forme de support, dû à la rotation, ou bien à un chauffage conséquent à la formation d'étoiles (après fragmentation).

Remarquablement, dans ce diagramme, les courbes de refroidissement passent exactement à l'endroit attendu. *Les baryons des galaxies* sont en dessous de la région où le refroidissement est attendu, et se situent même dans une zone où un très efficace refroidissement atomique est attendu, si bien qu'ils sont certainement condensés aujourd'hui, donnant lieu aux systèmes lumineux observés. Par contre, les structures plus massives, *groupes ou amas*, sont justes au dessus de ces courbes si bien que leur refroidissement n'est que marginal à leur échelle. Elles contiennent certes des galaxies, mais provenant de coeurs baryoniques effondrés auparavant, ayant perdu certainement les parties les plus externes de leur baryons au profit du gaz inter-galactique (ICM), dominant la fraction baryonique de ces systèmes comme nous le détaillerons dans les chapitres 6, 7 et 8.



Remarquablement encore, la séquence de Hubble apparaît clairement, dans des bandes distinctes. Mieux, les fractions correspondantes aux valeurs de  $\sigma$  déterminées sur ce diagramme (aux incertitudes près), si elles sont sous-tendues par un champ gaussien, sont compatibles avec les proportions morphologiques observées. La nette distribution de cette séquence trouverait probablement son origine dans la corrélation attendue entre hauteur de pics, en unité de  $\sigma$ , et moment angulaire, mesuré par la grandeur adimensionnée  $\lambda = JE^{1/2}G^{-1}M^{-5/2}$ , où  $E$  est l'énergie de liaison et  $J$  dénote le moment angulaire : les fluctuations à grand  $\sigma$  auraient un moment angulaire moindre, si bien qu'elles seraient à même de s'effondrer avec un facteur de compression radiale plus important, formant ainsi une galaxie elliptique très dense. Qui plus est, attendant, pour un spectre plat, plus de fluctuations à haut  $\sigma$  dans les régions sur-denses destinées à former des amas riches, les proportions morphologiques particulières aux galaxies habitant ces systèmes seraient également justifiées.

Ces simples faits apportent un grand, et solide, crédit à ce scénario *hiérarchique*, basé sur un spectre initial de fluctuations de type Harrison-Peebles-Zel'dovich, où la matière est dominée par une matière noire froide. Ce scénario ferait des galaxies sphéroïdes naines (points en bas à gauche du diagramme) les premiers objets de cette hiérarchie à s'effondrer.

## Un besoin d'au-delà

Cette vision, aussi satisfaisante qu'elle soit de par sa simple et puissante élégance<sup>15</sup>, nous offre certainement un aperçu correct du schéma général, mais pâtit de sa simplicité dès lors que l'on s'attache à ses détails. Par exemple, un tel scénario conduirait en fait à la formation exclusive d'objets baryoniques condensés à un trop grand  $z$  ( $\gtrsim 5$ ) : il s'agit du fameux problème de “*sur-refroidissement*” mentionné en [11, 15], d'où découle la nécessité d'un chauffage non-gravitationnel sur lequel nous reviendrons au chapitre 7. Par ailleurs, un tel scénario ne peut reproduire adéquatement la distribution de galaxies, puisque les phénomènes de *fusion*, qui tendront à faire disparaître les galaxies de faible masse au profit de plus grosses, ne sont pas pris en compte. Ces fusions compliquent également sensiblement l'histoire des galaxies, qui même si possédant initialement un disque, tendront à le perdre après fusion ou accretion d'autres objets. Leur trajet dans le plan  $n_b - T$  au cours de leur évolution est donc probablement plus complexe. Sont négligés également, les phénomènes d’“dépouillement” des parties externes des galaxies lors des fusions des échelles successives, qui tendraient à remonter les structures galactiques vers le haut (à baisser  $n_b$ ). De ce dépouillement témoignent pourtant la métallicité croissante du gaz cosmique, suggérant une forme de “rétro-action” stellaire, classe de processus ici négligée dans son ensemble... Et puis, plus généralement, la relation conjecturée entre hauteur de fluctuation et paramètre de spin n'est pas

<sup>15</sup>Nous ne pouvons résister à la tentation de mentionner ce fait supplémentaire : galaxies et groupes sont séparés par une ligne de refroidissement de type Compton, ce qui suggère que la formation des galaxies cesse avec celui-ci.

observé dans les simulation numériques, si bien que cette simple explication de la séquence de Hubble ne fonctionne pas. Cela négligerait également le transfert de moment angulaire par des “grumeaux” de baryons condensés vers le halos sombre par friction dynamique... Nous devons donc reconnaître, humblement, la très grande complexité de cette physique non-linéaire baryonique <sup>16</sup>.

Cette difficulté n’est pas nécessairement un obstacle pour la cosmologie. L’échappatoire est en deux points. Tout d’abord, malgré la prévalence observationnelle de la matière baryonique, il reste que la matière semble dominée par une composante noire. Aussi, si l’on admet qu’elle est tracée par la distribution de galaxies (modulo des biais statistiques cachant la complexité précédemment évoquée), alors les grands relevés de galaxies entrepris jusqu’alors nous permettent d’explorer la distribution de matière à grande échelle. Ensuite, en considérant des échelles suffisamment importantes pour être à même de négliger la contribution de cette physique hautement non-linéaire (baryonique ou non), on peut entreprendre une approche, analytique, dans un domaine faiblement non-linéaire. Ceci se fait au moyen d’une approche perturbative à la solution isotrope et homogène, résultant du simple *principe cosmologique* [19].

Ce cadre théorique sous-tend l’interprétation des grands relevés de galaxies entrepris aujourd’hui et la plupart des observations présentes des grandes structures de l’Univers, dont, peut-être la plus éclatante aujourd’hui, au sens où elle échappe à toute hypothèse forte faite sur la physique baryonique hormis sa faible contribution à la masse totale, est celle du cisaillement gravitationnel causé par ces grandes structures, le “*cisaillement cosmique*” [20, 21]. L’ensemble de ces résultats ne cesse de confirmer, avec une précision croissante, la validité d’un modèle de formation hiérarchique des structures, dans un Univers dont la matière est dominée par une matière noire froide.

Par ailleurs, cette approche, et c’est entre autres sa motivation, par une description perturbative de la croissance de ces fluctuations de densité, permet de séparer l’influence des propriétés statistiques des conditions initiales de celle des effets dynamiques ultérieurs. Ainsi, elle illumine la nature statistique de ces conditions initiales et permet donc d’introduire la question de *la nature et de l’origine de ces fluctuations*.

Néanmoins, ce fait amène à réaliser la limitation propre à ces approches : la compréhension qu’elles nous offrent est dictée par celle de l’Univers très proche ( $z \lesssim 2$ ) et peine donc à répondre à la question de l’origine de ces fluctuations dont l’effondrement structure notre Univers.

Cette possibilité sera améliorée par le fait que, dans un Univers dominé par la matière, l’horizon ( $\propto t$ ) croissant plus vite que l’Univers ( $\propto t^{2/3}$ ), nous pourrions, en observant à de plus lointaines distances, et donc à un temps antérieur, agrandir les échelles explorées. Par là même, nous nous rapprocherons de la linéarité qui facilitera notre compréhension théorique, et permettra la dérivation de nouvelles contraintes, complémentaires.

Ce simple fait, cette évolution vers la linéarité, ce besoin d’au-delà, trouve

---

<sup>16</sup>Notons également, qu’un tel scénario ne favorise pas la grande abondance de galaxies sphéroïdes “rouges” détectés à  $z > 1$  [16, 17, 18].

sa plus belle expression dans l'existence et l'observation du rayonnement cosmologique micro-onde (CMB).

## Le rayonnement cosmologique millimétrique

Prédite dès 1946 comme une conséquence observable d'un modèle d'Univers en expansion originellement dans une phase chaude et dense [22], l'existence d'un fond diffus de photons, thermalisé, homogène, et isotrope, s'étant *découplé* du plasma primordial peu de temps après que celui-ci se soit refroidi suffisamment pour que se forment les premiers atomes d'hydrogène lors de la *recombinaison* ( $T \simeq 13.6$  eV,  $z \simeq 1100$ ) <sup>17</sup>, a été mise en évidence par la détection d'un fond diffus micro-onde, isotrope et homogène, en 1965 [23, 24]. Cette détection constitue, sans aucun doute, une des plus grandes évidences observationnelles en faveur du modèle cosmologique standard.

Mais cela ne suffit pas. Si notre compréhension de la formation des structures exploitant l'instabilité des modèles de Friedman-Lemaître vis à vis d'une inhomogénéité de masse est adéquate, alors, comme nous l'avons vu, des fluctuations de densité existent déjà au moment du découplage et doivent imprimer, à un niveau détectable, des variations d'intensité, soit de température, sur ce fond diffus. Aussi, la première mise en évidence de ces anisotropies de température par le satellite COBE [25, 26] (ainsi que la confirmation de la thermalisation de ce rayonnement), et la compatibilité de leur amplitude ( $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ ) avec ce que requièrent les grandes structures observées à faible redshift <sup>18</sup>, a fortement conforté les bases de ce scénario.

Plus récemment encore, la nouvelle génération d'expériences (BOOMERanG [27], MAXIMA [28], DASI [29]) a permis d'affiner, et de confirmer, par la découverte de pics acoustiques dans le spectre de puissance angulaire de ces fluctuations, notre compréhension de la physique de cette surface de dernière diffusion. Remarquablement, nous y reviendrons, les contraintes sur le modèle de Friedman-Lemaître tirées de ces observations semblent confirmer celles obtenues à plus bas  $z$ , soit neuf ordres de grandeur temporels plus tard...

La possibilité d'observer des fluctuations de densité à  $z_{dec} \simeq 1100$  permet d'élargir considérablement notre gamme d'échelle explorée. Par exemple une échelle linéaire de  $100 h^{-1}$  Mpc aujourd'hui a évolué d'une région de taille  $100(1 + z_{dec})^{-1}$  à la recombinaison, soit une taille de  $(\Omega h) \simeq 0.6$  degrés sur le ciel. De même, une échelle de taille  $1000 h^{-1}$  Mpc aujourd'hui, correspond seulement à une dizaine de degrés sur le ciel. De telles échelles constituent aujourd'hui la limite accessible par les catalogues de galaxies (le relevé Sloan Digital Sky Survey explore  $k \gtrsim 10^{-2} h$  Mpc<sup>-1</sup> soit des longueurs  $\lesssim 600 h^{-1}$  Mpc).

<sup>17</sup>Notons que l'hélium ayant une énergie d'ionisation plus élevée se recombine avant.

<sup>18</sup>En fait, il était assez évident bien avant la détection que tel devait être l'amplitude des fluctuations à grande échelle (effet Sachs-Wolfe comme nous le verrons ci dessous), car cela correspond à la profondeur relative du puit de potentiel d'un amas riche de dispersion de vitesse  $\sigma_v \sim 1000$  km.s<sup>-1</sup>, puisque  $\Phi/c^2 \sim v^2/c^2$ .

Ce rayonnement, fossile de l'ère du découplage nous offre, par ailleurs, une fenêtre *unique* sur la physique du l'ère du couplage baryons-photons. Il constitue de toute évidence le seul signal électromagnétique détectable émis à cette époque <sup>19</sup>. Cette physique et ses signatures observables (plateaux et pics de son spectre de puissance, etc.) étant de plus très bien décrites par une physique linéaire (fluctuations du potentiel de matière de l'ordre de  $10^{-5}$ ), elles s'en trouvent bien comprises, ce qui affine d'autant plus les contraintes que l'on peut en tirer [30]. Nous distinguerons par la suite les anisotropies trouvant leur origine au moment même du découplage, *les anisotropies primaires*, et étant adéquatement décrites par une physique linéaire, de celles imprimées plus tardivement et engendrées par des effets non-linéaires dus à des structures effondrées plus récentes, *les anisotropies secondaires*. Ce plan de photons se propageant depuis une source bien définie, à l'aube de la formation des structures baryoniques, apportera également de très nombreuses informations sur les structures entre ce plan et nous (distorsions gravitationnelles, effet SZ, etc.). Avant de décrire succinctement les mécanismes à l'origine de ces anisotropies, rappelons quelques motivations et principes d'une description statistique de ces caractéristiques.

### Une description statistique des fluctuations de température

Les différentes théories décrivant l'origine de ces fluctuations prédisent uniquement les propriétés statistiques de cartes de fluctuations de température. A cela, des raisons profondes : les deux mécanismes généralement considérés comme à l'origine de ces fluctuations sont de nature intrinsèquement stochastique. Soit des fluctuations quantiques vont subir *une transition quantique-classique* (sur lequel beaucoup reste à dire) lors d'une phase d'*inflation* et donner lieu à *des variables stochastiques classiques* et en fait largement Gaussiennes, soit elles résultent de défauts topologiques, eux-même résultant d'un processus stochastique classique, une transition de phase.

Par conséquent, la première quantité statistique (après la moyenne, *i.e.* le monopole) que l'on cherchera à mesurer sera la fonction de corrélation à deux points du champ de fluctuations de température sur le ciel,  $\Delta T/T(\mathbf{n})$ , considéré comme un champ aléatoire :

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}') \right\rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \mathcal{C}_{\ell} P_{\ell}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') , \quad (14)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur de la sphère unité, où  $P_{\ell}$  désigne les polynômes de Legendre, et où  $\langle \rangle$  dénote une moyenne d'ensemble, *i.e.* une moyenne sur un nombre infini de réalisations du processus stochastique sous-jacent. Dans cette équation, nous avons d'hors et déjà introduit le spectre de puissance angulaire,  $\mathcal{C}_{\ell}$ , transformée

---

<sup>19</sup>On pourrait, toutefois, envisager également l'observation d'un fond diffus d'onde gravitationnelle prévu comme devant avoir lieu à la fin d'une phase inflationnaire, ou bien, la détection d'un fond de neutrinos, jusqu'alors uniquement détecté indirectement à travers son effet sur la nucléosynthèse primordiale.

en harmonique sphérique de cette fonction de corrélation à deux points. Nous avons également fait usage de l'isotropie découlant du principe cosmologique en écrivant que cette fonction ne dépend que de l'angle séparant les vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$ , *i.e.* de  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$ . Cette propriété d'isotropie a des conséquences pratiques importantes puisqu'elle permet, moyennant l'usage de *l'hypothèse ergodique*, de remplacer cette moyenne d'ensemble par une moyenne spatiale<sup>20</sup>. Toutefois, cette substitution d'un ensemble de mesure finie (le ciel) à un ensemble de mesure infinie (l'espace des réalisations du processus aléatoire d'intérêt) ne sera pas sans perte d'information et introduira un degré d'indétermination inéluctable sur la connaissance de la distribution statistique sous-jacente : l'ensemble de ces incertitudes est génériquement désigné sous le terme d'*erreurs cosmiques*.

En pratique, la confrontation entre observation et théorie se fera essentiellement par l'intermédiaire des  $\mathcal{C}_\ell$ . Hormis la commodité apportée par la considération de fonction à deux points, cela est motivé par le fait que les modèles favorisés aujourd'hui, *i.e.* les modèles inflationnaires (voir section suivante), donnent naissance à des fluctuations Gaussiennes, si bien que la distribution statistique est complètement caractérisée par ses  $\mathcal{C}_\ell$ . Néanmoins, même si les plus récentes mesures tendent à confirmer le caractère Gaussien de ces fluctuations, un degré de non-Gaussianité n'est pas à exclure et doit être cherché. Nous en proposerons un moyen au chapitre 5, mais nous consacrerons tout d'abord notre chapitre 3 aux problèmes liés à la mesure des  $\mathcal{C}_\ell$ .

### Description des mécanismes à l'origine des anisotropies primaires

Plusieurs échelles angulaires nous permettent de caractériser succinctement les mécanismes à l'origine des anisotropies primordiales. Par taille angulaire décroissante ( $\ell$  croissant) : la taille de l'horizon, la longueur de Jeans du fluide photons-baryons et la longueur d'amortissement [30, 31, 32].

*La taille angulaire,  $\theta_H$ , de l'horizon* au moment du découplage est une échelle importante quant à l'origine des anisotropies :

$$\theta_H \simeq 0.87^\circ \Omega z_{dec}^{1/2} \left( \frac{z_{dec}}{1100} \right)^{-1/2} \simeq 1^\circ \quad \text{soit} \quad \ell_H \sim 120. \quad (15)$$

À grande échelle,  $\theta \geq \theta_H$ , *i.e.* en dehors de l'horizon, la physique est très simple. Seules les perturbations de matière distordent l'espace et affectent donc les géodésiques des photons diffusés à ce moment. Cet effet, dominant à ces échelles, est connu sous le nom d'effet Sachs-Wolfe (ordinaire, OSW).

À une échelle de l'ordre de *la longueur de Jeans*,  $\theta_J$ , plus petite que l'horizon,

$$\theta_J = c_s \theta_H \quad \text{avec} \quad c_s \sim 1/\sqrt{3} \quad \text{soit} \quad \ell_J \sim 200, \quad (16)$$

où  $c_s$  désigne la vitesse du son, la physique du fluide photons-baryons entre en jeu. Ce fluide sera le lieu d'oscillations dont les longueurs caractéristiques (longueur de compression ou de raréfaction) donneront lieu à des pics dans le

---

<sup>20</sup>L'isotropie, ou stationnarité spatiale, est une condition nécessaire à l'hypothèse ergodique puisque l'ergodicité implique la stationnarité.

spectre de puissance : “les fameux pics acoustiques”. La hauteur relative de ces pics de compression et de raréfaction sera étroitement liée à l’abondance des baryons puisque ceux-ci déterminent la masse effective du système oscillant.

Enfin la longueur d’amortissement,

$$\theta_A \simeq 0.2^\circ \quad \text{soit} \quad \ell_A \sim 1500, \quad (17)$$

sera déterminée essentiellement par deux processus. Tout d’abord le découplage n’est pas instantané mais a une certaine durée : on ne passe pas instantanément d’un fluide se couplant avec un parcours moyen très faible (devant l’horizon) à deux fluides découplés avec un libre parcours moyen des photons plus grand que l’horizon. Aussi tout les modes de période temporelle inférieure à cette durée recevront des contributions de différents instants de la phase de découplage. La somme de ces contributions sera incohérente aussi la contribution des modes sera sensiblement amortie. La seconde source d’amortissement provient du flot libre des photons dans cette phase de transition. Ce flot libre effacera toute perturbation de longueur moindre que la longueur de diffusion des photons à cet instant. Cet effet est connu sous le nom d’amortissement *Silk*.

À ces effets, s’ajoute des effets *de type Doppler* dus à la vitesse des électrons au moment où ils diffusent les photons pour la dernière fois. Cet effet présentera également des pics acoustiques mais déphasés d’une demi-période, puisque la vitesse est déphasée d’une demi-période par rapport aux variations de potentiel. Sans la force de freinage des baryons, cet effet serait du même ordre de grandeur que les oscillations acoustiques. Toutefois, les baryons, augmentant la masse effective du système oscillant, diminuent la vitesse. Cet effet en devient sous-dominant.

Ces effets, ainsi que certaines sources d’anisotropies secondaires, sont tracés sur la figure 2.

### Description des mécanismes à l’origine des anisotropies secondaires

Les anisotropies secondaires trouvent leur origine entre la surface de dernière diffusion et leur détection actuelle. *Elles excluent, par convention, les avant-plans galactiques dont nous ne parlerons pas ici.* Leur origine est soit gravitationnelle soit conséquent à la réionisation. Nous les discuterons séparément.

Les anisotropies d’origine gravitationnelle sont les suivantes.

- *L’effet Sachs- Wolfe intégré* (ISW) découle de la variation temporelle des puits de potentiel au cours de la traversée par les photons : ils gagnent de l’énergie si le puit se comble, et en perdent s’il se creuse. Il est courant de distinguer l’*ISW tardif* de l’*ISW précoce*. Le *tardif*, dû à des fluctuations après le découplage, tendra à disparaître pour les fluctuations de potentiel peu étendues, car les nombres de sous-densités et de sur-densités devant être égaux, leur effet se compensera. Par contre, plus la taille de ces fluctuations de potentiel est importante, plus la probabilité qu’un photon n’en traverse qu’un est grande et, alors, l’effet peu être important. Aussi,

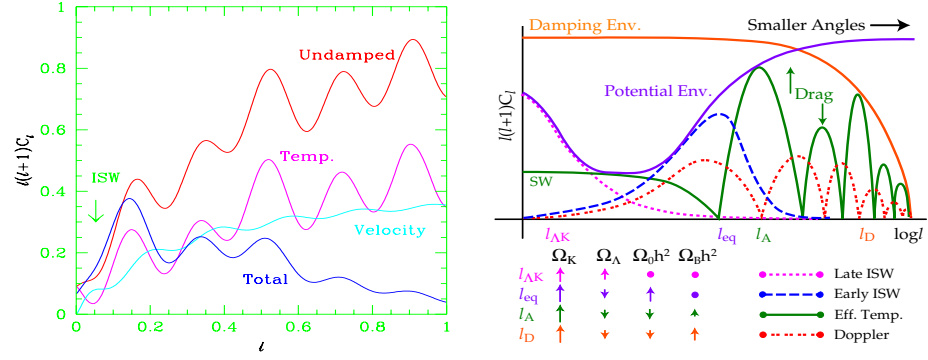


FIG. 2

Diverses contributions aux anisotropies primaires, figure de gauche, et primaires plus secondaires, figure de droite. Influence qualitative de différents paramètres cosmologiques. Empruntés à [33] et [31].

un effet ISW tardif sera présent à toutes les échelles mais se trouvera être dominant pour les grands modes. Il sera en fait dominant à très grande échelle. L'effet ISW tardif prend toute son importance si nous sommes dominés par une constante cosmologique aujourd'hui qui gèlera la croissance de certains modes du potentiel gravitationnel. Le second, *précoce*, trouve son origine dans le fait que la pression de radiation encore efficace au moment même du découplage tend à amortir les fluctuations de potentiel lorsqu'elles rentrent dans l'horizon. Par ce fait, tous les modes (du potentiel) pénétrant l'horizon entre le découplage et le moment où la matière domine peuvent donner lieu à un effet ISW important. Cet effet ayant lieu au moment du découplage pourrait être classé parmi les sources d'anisotropies primaires. La projection de ces effets embrouillera un peu leur répartition en mode angulaire.

- Si les variations temporelles responsables de l'effet ISW sont dues à une évolution non-linéaire (et donc rapide) de certains modes, on parle plutôt d'effet *Rees-Sciama*. Puisque dans un modèle hiérarchique les faibles fluctuations deviennent non-linéaires tout d'abord, cet effet est maximal à des petits angles mais demeure très faible.
- Enfin, des fluctuations de courbure dues aux grandes structures de l'Univers vont distordre le front de photons et vont avoir tendance à effacer les anisotropies primaires à très basse échelle. Il s'agit de l'effet de *lentilles gravitationnelles* piquant à petite échelle car causé essentiellement par des structures non-linéaires récentes.

Enfin, alors que la recombinaison est synonyme de neutralisation (on passe d'un plasma Coulombien à un gaz d'atomes) le test de Gunn-Peterson nous

permet d'affirmer que l'Univers a été réionisé à  $z \gtrsim 5$ <sup>21</sup>. Les causes de cette *réionisation* sont encore débattues mais impliquent, on le pense, la première génération d'étoiles ou bien, plus spéculativement, la désintégration de particules exotiques. Les anisotropies liées à cette nécessaire réionisation sont les suivantes.

- Il est évident qu'une telle réionisation pourrait simplement effacer toute anisotropie primaire si elle avait lieu assez tôt, par simple diffusion des photons primordiaux incidents. En fait toute anisotropie primordiale est perdue à une échelle plus petite que la taille de l'horizon au moment de la réionisation,  $\ell_r$ . Fortuitement, les observations actuelles semblent, indiquer une réionisation proche de  $z \sim 6$ , si bien que peu d'informations sont perdues, puisque  $\ell_r \sim \ell_A$ .
- Tout effet d'inhomogénéité au moment de la réionisation pourrait imprimer des signatures difficilement séparables des anisotropies primaires. Dépendant de la modélisation, ces effets peuvent toutefois dominer les anisotropies secondaires à une échelle supérieure à l'arc-seconde.
- L'effet *Ostriker-Vishniac*, effet non-linéaire, met en jeu les corrélations entre les perturbations de densité et la vitesse (des électrons diffusant les photons) le long de la ligne de visée. Son amplitude dépend beaucoup de l'histoire précise de la réionisation mais il est généralement admis qu'il domine les anisotropies primaires seulement pour  $\ell > 2000$ .
- Enfin, la diffusion Compton inverse des photons primordiaux par des électrons chauds, l'effet *Sunyaev-Zel'dovich* (SZ), peut produire des anisotropies secondaires. Si le gaz possède un mouvement d'ensemble (au sein d'un amas par exemple), cet effet possèdera une composante Doppler, appelée effet SZ cinétique. L'amplitude de cet effet SZ, à la dépendance spectrale spécifique, nous renseigne sur l'histoire thermique du gaz cosmique. Nous le mettrons à profit dans les chapitres 6, 7 et 8 pour observer le gaz interne aux amas de galaxies.

Les contributions additionnées de ces anisotropies primaires et secondaires constitueront les anisotropies du rayonnement fossile. De la compréhension quantitative de ces effets dépendra notre compréhension du modèle standard cosmologique.

## Description des mécanismes à l'origine des fluctuations primordiales

Avant de décrire, enfin, différents tests que l'on peut faire subir à ce scénario, demeure une question que nous avons négligée jusqu'alors : *l'origine des fluctuations* dont la croissance par instabilité gravitationnelle donnera naissance aux structures que nous connaissons. Cette question, ainsi que les problèmes *de l'horizon*, *de la platitude* et *des monopoles*, constituent les principaux points obscurs du scénario cosmologique standard esquissé ci-dessus.

---

<sup>21</sup> Il semblerait que récemment [34] une réionisation rapide à  $z \sim 6$  ait été détectée par ce test Gunn-Peterson.



- *Le problème de l'horizon* tient au fait que dans un scénario cosmologique standard, les points du rayonnement fossile séparés de plus de  $\theta_H$  n'ont pas été en contact causal au moment du découplage alors qu'ils exhibent une grande homogénéité, à  $10^{-5}$  près.
- Aujourd'hui, l'Univers est plat, ou proche de la platitude. Cela nécessite que dans le passé la densité de l'Univers ait été infiniment proche de la densité critique. C'est le *problème de la platitude*.
- *Le problème des monopoles* vient simplement de l'absence d'un reliquat de monopoles, pourtant prévu à cause de transitions de phases par les théories de Grande Unification.

L'inflation, en supposant que l'expansion de l'Univers connaît une phase accélérée sous l'influence d'un *champ scalaire* <sup>22</sup>, bien avant l'ère de rayonnement, résoud simultanément tout ces problèmes. C'est son point fort. Les fluctuations de matière seraient alors le résultat de fluctuations quantiques de ce champ scalaire ayant subi une transition quantique-classique pendant l'ère d'inflation. Les conséquences génériques de ces modèles sont les suivantes : des fluctuations initiales *Gaussiennes*, un *Univers à courbure plane* et un *spectre de perturbations invariant d'échelle* (du type Harrison-Peebles-Zeldovich précédemment envisagé) dans les cas génériques. Hormis le fait que ces trois derniers points semblent être ceux indiqués par les plus récentes observations, la principale vertu de cette classe de modèle est de répondre simultanément à ces trois problèmes et de repousser, sur une base plus ou moins solide, le problème des conditions initiales plus avant vers l'ère de Planck. Sa faiblesse demeure son caractère encore *ad hoc*, et donc spéculatif.

Ceci la différencie des modèles faisant intervenir des *sources actives* <sup>23</sup>, tels que les défauts topologiques. La création de ces défauts lors de transitions de phase est en effet prévue génériquement par les théories des hautes énergies, mais leurs prédictions observationnelles, même si complexes et donc encore débattues, semblent de plus en plus difficiles à concilier avec les résultats observationnels les plus récents. Il demeure que si elles ne sont pas la source dominante de ces perturbations, il est envisageable qu'elles aient une contribution, détectable. Il reste donc très important d'affiner notre compréhension de leur évolution, et de leur production, y compris pendant ou à l'issue d'une phase d'inflation. Nous reviendrons au chapitre 5 sur de tels *scénarios hybrides*.

## Tester et contraindre ce scénario cosmologique

Au cours des sections précédentes, nous avons vu combien la donnée d'un spectre de fluctuations initiale de matière, éventuellement caractérisé par des paramètres inflationnaires, pouvait dans le cadre d'un modèle cosmologique

<sup>22</sup>On pourrait envisager l'existence de plusieurs champs, et il existe, plus généralement, une zoologie très riche de modèles inflationnaires.

<sup>23</sup>Au sens où elles sont générées constamment autour du temps.

de Friedman-Lemaître, conduire à une grande variété de prédictions, depuis la recombinaison jusqu'à l'Univers proche [35].

Tester ces modèles <sup>24</sup> et contraindre leurs paramètres en les confrontant à autant d'observations que possible, constituent la raison d'être de *la cosmologie observationnelle*, discipline extrêmement active aujourd'hui. Le principe en consiste à déterminer les paramètres du modèle de Friedman-Lemaître, *i.e.* à déterminer les paramètres entrant dans l'équation 12 définissant la forme de  $a(t)$ , et ceux décrivant le spectre de fluctuations de matière initiales. Pour résumer en une phrase une décennie d'observations, le fait remarquable aujourd'hui est que la multitude des observations effectuées <sup>25</sup> - chacune imposant au modèle des contraintes très différentes - semble converger depuis la seconde moitié des années 1990 vers un nouveau paradigme cosmologique (le seul modèle viable semble-t-il) :  $\Omega \sim 0.3$ ,  $\Omega_\lambda \sim 0.7$ ,  $\Omega_b \simeq 0.04$ ,  $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  et  $\sigma_8 \simeq 1$ . Ces contraintes indiquent donc un Univers dominé aujourd'hui par une éventuelle constante cosmologique, et où la matière est principalement sous la forme d'une matière noire sombre froide. Cette concordance ne signifie en rien que cette description soit complète, puisque de nombreuses questions demeurent, telles que la nature de la matière noire, dont les effets dynamiques apparaissent dès l'échelle des halos de galaxies. Il demeure que le succès de ce modèle et la diversité des tests passés peut nous donner une certaine confiance quant à la validité du cadre général.

À ces nécessaires efforts de tests cosmologiques, à leur conception ou au moyen de leur mise en oeuvre, notre travail de thèse s'est efforcé d'apporter quelques contributions.

## Présentation de ce mémoire de thèse

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été effectué entre novembre 1999 et décembre 2001 à l'Institut d'Astrophysique de Paris, sous la direction de F.R. Bouchet.

Sa présentation, fidèle à la diversité de nos travaux, s'organisera en deux parties d'importance inégale. Chaque partie sera précédée d'un chapitre introductif : les chapitres 1 et 6.

La première partie sera dédiée à différentes de nos contributions au progrès des méthodes *d'analyse de données pour les expériences de mesure du CMB*. Nos travaux concernent les différentes étapes de cette analyse, que sont la fabrication rapide de cartes (chapitre 2), l'estimation du spectre de puissance angulaire (chapitre 3), les effets systématiques dus à la non symétrie du lobe instrumental principal (chapitre 4), et, enfin, à une méthode précise de détection de la non-Gaussiannité (chapitre 5).

---

<sup>24</sup>A la réaliste, et positiviste, activité de "mesure des paramètres cosmologiques", nous préférons celle, plus empiriste, de "test du modèle physique de Friedman-Lemaître".

<sup>25</sup>Parmi les plus remarquables, notons l'évolution de la distance lumineuse avec  $z$ , la distorsion gravitationnelle par les grandes structures, l'abondance des amas et galaxies, l'abondance en éléments légers, l'âge des objets individuels et enfin les fluctuations du CMB...

S'éloignant d'une physique linéaire, notre seconde partie concernera, elle, la physique des grandes structures de l'Univers et, plus précisément, celle des amas de galaxies. Nous proposerons dans le chapitre 7 un modèle analytique permettant de comprendre certaines relations observées dans les amas. Enfin, dans le chapitre 8, nous posant la question de la manière dont doivent être analysées diverses observations d'un unique amas, nous fournirons une réponse au moyen d'une méthode perturbative, et l'illustrerons en considérant la situation où nous sont accessibles des observations d'effets de lentilles gravitationnelles et de l'effet Sunyaev-Zel'dovich.

Pour chacun de ces sujets, soin sera pris d'introduire dans un contexte général nos travaux, d'expliquer leurs principes et de les illustrer par des exemples lorsque possible. Nous tâcherons enfin d'explicitier leurs hypothèses, et tant que faire se peut, de les discuter critiqueusement. Ceci nous permettra d'esquisser certaines de nos recherches en cours, ou à défaut, de pointer certaines directions que nous aimerions suivre.

# Bibliographie

- [1] A. Einstein. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.*, 142, 1917.
- [2] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [3] J. Peebles. *The Large Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1993.
- [4] J. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [5] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [6] E. Kolb and M. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [7] T. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [8] A. Liddle and D. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [9] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *MNRAS*, 136 :101+, 1967.
- [10] J. Silk. On the fragmentation of cosmic gas clouds. I - The formation of galaxies and the first generation of stars. *ApJ*, 211 :638–648, February 1977.
- [11] S. D. M. White and M. J. Rees. Core condensation in heavy halos - A two-stage theory for galaxy formation and clustering. *MNRAS*, 183 :341–358, May 1978.
- [12] G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, 311 :517–525, October 1984.
- [13] J. Silk. From dwarfs to giants - Signposts of galaxy formation. *Nature*, 301 :574–578, February 1983.
- [14] M. J. Rees and J. P. Ostriker. Cooling, dynamics and fragmentation of massive gas clouds - Clues to the masses and radii of galaxies and clusters. *MNRAS*, 179 :541–559, June 1977.
- [15] A. Blanchard, D. Valls-Gabaud, and G. A. Mamon. The origin of the galaxy luminosity function and the thermal evolution of the intergalactic medium. *A&A*, 264 :365–378, October 1992.

- [16] A. Cimatti, D. Villani, L. Pozzetti, and S. di Serego Alighieri. The density of extremely red objects around high- $z$  radio-loud active galactic nuclei. *MNRAS*, 318 :453–461, October 2000.
- [17] E. Daddi, A. Cimatti, and A. Renzini. EROs and the formation epoch of field ellipticals. *A&A*, 362 :L45–L48, October 2000.
- [18] E. Daddi, T. Broadhurst, G. Zamorani, A. Cimatti, H. Röttgering, and A. Renzini. The spatial clustering of distant,  $z \gtrsim 1$ , early-type galaxies. *A&A*, 376 :825–836, September 2001.
- [19] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, and R. Scoccimarro. Large Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory. *Physics Report in press*, 2001.
- [20] L. Van Waerbeke, Y. Mellier, T. Erben, J. C. Cuillandre, F. Bernardeau, R. Maoli, E. Bertin, H. J. Mc Cracken, O. Le Fèvre, B. Fort, M. Dantel-Fort, B. Jain, and P. Schneider. Detection of correlated galaxy ellipticities from CFHT data : first evidence for gravitational lensing by large-scale structures. *A&A*, 358 :30–44, June 2000.
- [21] L. Van Waerbeke, Y. Mellier, M. Radovich, E. Bertin, M. Dantel-Fort, H. J. McCracken, O. Le Fèvre, S. Foucaud, J.-C. Cuillandre, T. Erben, B. Jain, P. Schneider, F. Bernardeau, and B. Fort. Cosmic shear statistics and cosmology. *A&A*, 374 :757–769, August 2001.
- [22] G. Gamow. Expanding Universe and the origin of elements. *Physical Review*, 70 :572, 1946.
- [23] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *ApJ*, 142 :419–421, July 1965.
- [24] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson. Cosmic Black-Body Radiation. *ApJ*, 142 :414–419, July 1965.
- [25] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, E. L. Wright, J. Aymon, N. W. Boggess, E. S. Cheng, G. de Amici, S. Gulkis, M. G. Hauser, G. Hinshaw, P. D. Jackson, M. Janssen, E. Kaita, T. Kelsall, P. Keegstra, C. Lineweaver, K. Loewenstein, P. Lubin, J. Mather, S. S. Meyer, S. H. Moseley, T. Murdoch, L. Rokke, R. F. Silverberg, L. Tenorio, R. Weiss, and D. T. Wilkinson. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *ApJ Let.*, 396 :L1–L5, September 1992.
- [26] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set. *ApJ*, 473 :576+, December 1996.
- [27] P. de Bernardis, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, G. De Gasperis, P. C. Farese, P. G. Ferreira, K. Ganga, M. Giacometti, E. Hivon, V. V. Hristov, A. Iacoangeli, A. H. Jaffe, A. E. Lange, L. Martinis, S. Masi, P. V. Mason, P. D. Mauskopf, A. Melchiorri, L. Miglio, T. Montroy, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, S. Prunet, S. Rao, G. Romeo, J. E. Ruhl, F. Scaramuzzi, D. Sforna, and N. Vittorio. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404 :955–959, April 2000.

- [28] S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. de Bernardis, P. G. Ferreira, V. V. Hristov, A. H. Jaffe, A. E. Lange, A. T. Lee, P. D. Mauskopf, C. B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, B. Rabii, P. L. Richards, G. F. Smoot, R. Stompor, C. D. Winant, and J. H. P. Wu. MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of  $10^{-5}$  deg. *ApJ Let.*, 545 :L5–L9, December 2000.
- [29] C. Pryke *et al.* . Cosmological Parameter Extraction from the First Season of Observations with DASI. *soumis a ApJ*, 2001.
- [30] *Les Houches 1993 Summer School*, lecture by J. Richard Bond, EDP Sciences, 1996.
- [31] W. Hu. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1995.
- [32] A. Riazuelo. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2000.
- [33] W. Hu and M. White. The Damping Tail of Cosmic Microwave Background Anisotropies. *ApJ*, 479 :568+, April 1997.
- [34] B. Becker *et al.* . Evidence for Reionization at  $z=6$  : Detection of a Gunn-Peterson Trough in a  $z=6.28$  Quasar. *ApJ in press*, 2001.
- [35] P. J. E. Peebles. Is Cosmology Solved? an Astrophysical Cosmologist's Viewpoint. *PASP*, 111 :274–284, March 1999.



**Première partie**

**Analyse de données CMB**





# Chapitre 1

## Analyse de données CMB : une introduction

La mesure de l'intensité du CMB, de ses anisotropies et de leur caractérisation statistique constituera la première partie de ce mémoire de thèse. Nous nous concentrerons en particulier sur l'analyse de données, aux dépends de considérations plus proches de l'instrument - dont une bonne description peut par exemple être trouvée dans [1, 2]- même si nous nous devons de garder celles-ci présentes à l'esprit.

Ce domaine de recherche, lieu d'une très intense activité, n'existe que par les besoins inédits de nouvelles expériences. En effet, entrant dans l'ère dite "de précision", la cosmologie est entrée simultanément dans l'ère des jeux de données massifs, ce qui génère de nouveaux problèmes. Si bien que, tentant d'y apporter des réponses, une partie de la communauté de cosmologistes théoriciens se consacre à ce type de questions [3].

Dans cette introduction, nous tâcherons, brièvement, de présenter la raison d'être de ces expériences en regard de leur objectifs : la mesure des fluctuations de température du CMB. Ensuite, nous fournirons une description de la modélisation nécessaire des observations, définissant ainsi les notations employées couramment. Puis, surtout, nous fournirons une description générale et formellement motivée du processus d'analyse dans son ensemble. Quelques étapes clefs de ce processus ont fait l'objet de nos recherches et constitueront, chacune, un des chapitres de cette partie.

### 1.1 Mesures des paramètres cosmologiques et requêtes observationnelles

Le statut unique des mesures de fluctuations de température du CMB induit d'exceptionnelles contraintes observationnelles .

Nous l'avons vu, le caractère fondamental des mesures du CMB, *i.e.* leur

information cosmologique, est contenu dans les fluctuations de sa brillance, soit de sa température. Aussi, nous voudrions avant tout produire des cartes du ciel de température de ce rayonnement d'où nous déduirons les informations statistiques désirées, par exemple le spectre de puissance. Ce simple fait divise d'hors et déjà naturellement le processus complet en deux temps :

- la fabrication de ces cartes, *i.e.* l'obtention de cartes de fluctuations de température à partir de mesures ordonnées en temps ;
- la caractérisation de ces fluctuations et l'inférence des conséquences cosmologiques.

Pour ces cartes, on peut formuler les contraintes ou requêtes suivantes [4] :

1. Le bruit inhérent à ces mesures de fluctuations de température, de l'ordre de  $\Delta T/T \sim 10^{-6}$ , doit être limité par les fluctuations quantique du flux incident.
2. Ces cartes doivent être aussi étendues que possible, de manière à lutter contre la variance cosmique.
3. Puisque l'information cosmologique est concentrée dans les 3000 premiers  $\ell$  (les fluctuations sont complètement amorties au-delà), il convient que ces cartes soient à haute résolution ( $\theta_{pixel} = \pi/\ell_{max} \sim 3.6'$ ).
4. Un contrôle précis des erreurs systématiques requiert qu'un même pixel soit observé sous différentes inclinaisons et à différents instants. Il faut donc que la redondance soit spatialement et temporellement distribuée.
5. La nécessité de contrôler les divers signaux astrophysiques pouvant contaminer la mesure du CMB ; il est nécessaire de mettre à profit leurs dépendances spectrales distinctes en observant à plusieurs fréquences, voisines de celles du CMB ( $\lambda \sim 1$  mm).

A la lumière de ces contraintes, auxquelles s'en ajoutent quelques autres que nous ignorerons, il est possible de comprendre la variété des choix effectués par chacune des expériences de mesures du CMB. Nous discuterons sommairement celles nous concernant directement, négligeant ingratement certaines, plus anciennes, aux contributions majeures.

## 1.2 Expériences présentes et futures

### 1.2.1 Les instruments en service

La technologie actuelle permettant de répondre le mieux au cinquième point fait usage de bolomètres. Ces détecteurs, très sensibles, permettent en fait de couvrir, dans un intervalle de temps donné, une grande surface du ciel, permettant ainsi de répondre au mieux au point 2. Ces derniers sont sensibles à la chaleur déposée par la radiation incidente : aussi des températures très basses sont requises pour obtenir une faible capacité calorifique et donc une grande sensibilité, ce qui nécessite une cryogénie très performante (à dilution pour les plus performantes). Embarquer de telles installations à bord de ballons ou de

satellites, nécessité afin de se dispenser de l'absorption atmosphérique, est un défi que seules les plus récentes expériences ont relevé. Notons que la technologie de la génération passée (radiomètre et HEMT) demeure employée pour MAP <sup>1</sup> et PLANCK-LFI.

Le quatrième point nécessite un choix précis de balayage du ciel. Afin de lutter contre les signaux systématiques synchrones avec la rotation de l'instrument (ou autres mouvements périodiques), et les dérives à très basse fréquence (bruit en  $1/f$ ), il a été choisi par les équipes des satellites COBE <sup>2</sup> et MAP d'effectuer des mesures instantanées différentielles, *i.e.* de ne mesurer à chaque instant que la différence entre deux directions. Toutes deux utilisent également une stratégie de balayage remarquable [5], pour laquelle le ciel est observé très rapidement (une couverture complète du ciel tout les 6 mois) et chaque pixel est observé selon une multitude d'angles (entre 30 % et 70 % de la couverture azimuthale possible). En diminuant considérablement les propriétés à basse fréquence des détecteurs et en gageant d'être à même de contrôler les signaux systématiques synchrones avec la rotation, PLANCK [2] <sup>3</sup> et la plupart des expériences actuelles embarquées à bord de ballons ont choisi une "mesure de puissance totale", *i.e.* non différentielle.

Enfin, selon le domaine angulaire qu'elles ont choisi d'explorer (très haute résolution uniquement, *i.e.*  $0.11 \leq \theta \leq 2$  deg, pour BOOMERanG [6] <sup>4</sup> et MAXIMA [7] <sup>5</sup>, haute et basse résolution pour ARCHEOPS [8] <sup>6</sup> ou TopHat <sup>7</sup>, *i.e.*  $0.2 \geq \theta \geq 10$  deg), selon leur nombre de détecteurs (de 4 pour MAXIMA à 24 pour ARCHEOPS), et enfin selon leur temps d'observation (de 24 h pour ARCHEOPS et MAXIMA, à 10 jours pour BOOMERanG, et 2 ans pour MAP et PLANCK), des stratégies de balayage différentes ont été choisies afin de répondre aux points 1 et 2 (balayage de type "grille" pour 1% du ciel pour MAXIMA et BOOMERanG, grands cercles pour ARCHEOPS et PLANCK).

Aux dépens de l'exhaustivité, nous ne discuterons pas des mesures interférométriques s'étant montrées particulièrement efficaces récemment, par exemple DASI [9] <sup>8</sup>, et donc prometteuse pour les mesures à haute résolution angulaire.

Au bilan, les expériences actuelles embarquées à bord de ballons, et particulièrement BOOMERanG, MAXIMA et ARCHEOPS, ont marqué une grande avancée en utilisant pour la première fois une technologie bolométrique, ouvrant la voie à la mission PLANCK. Toutefois, de par la forte émission atmosphérique (chaude) et un environnement thermique moins favorable, leur sensibilité instantanée est de 3 à 5 fois moindre que celle espérée pour les missions spatiales. Conjugée à leur temps d'intégration moindre d'un facteur au moins 100, leur

---

<sup>1</sup><http://map.gsfc.nasa.gov/>

À l'heure où ce chapitre est écrit, MAP vient de rentrer en orbite autour du point de Lagrange L2...

<sup>2</sup><http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/>

<sup>3</sup><http://www.astro.estec.nl/Projects/Planck/>

<sup>4</sup><http://www.physics.ucsb.edu/~boomerang>

<sup>5</sup><http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html>

<sup>6</sup><http://www.archeops.org>

<sup>7</sup><http://topweb.gsfc.nasa.gov/tophat.html>

<sup>8</sup><http://astro.uchicago.edu/dasi/>

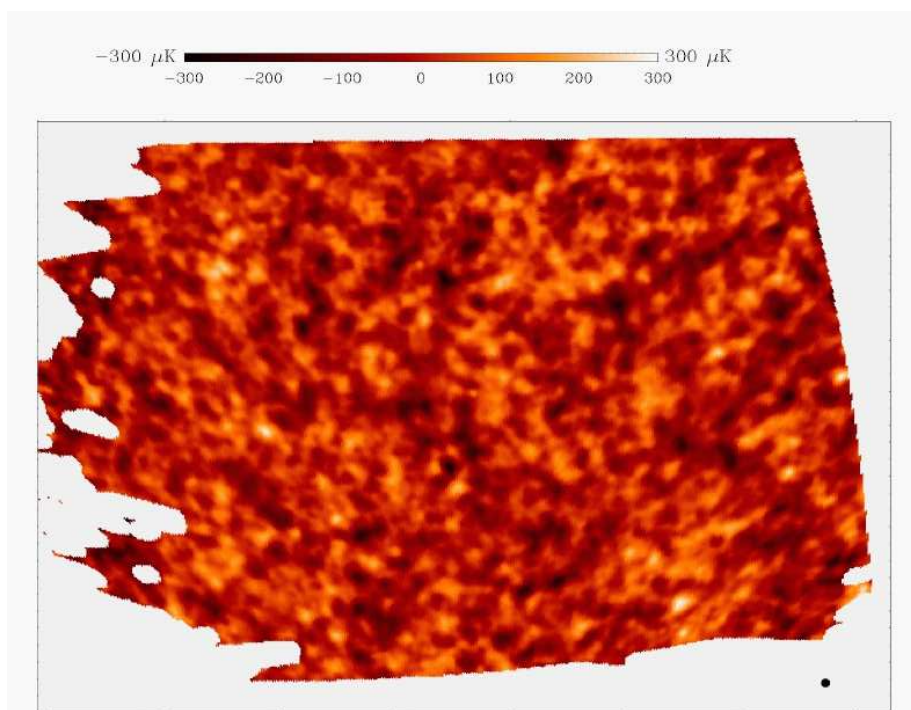


FIG. 1.1

La carte de la surface de dernière diffusion telle qu'observée par l'expérience BOOMERanG. Comprenant 2.5% du ciel soit environ 20 000 pixels de taille 13.7'.

sensibilité finale est ainsi de 30 à 50 fois supérieure au bruit des fluctuations quantiques de photons, qui devrait être la source dominante de bruit pour l'instrument HFI de PLANCK, que nous allons maintenant introduire rapidement. Au demeurant, au crédit des expériences BOOMERanG et MAXIMA, figurent les cartes les plus fines à ce jour de la surface de dernière diffusion (voir Fig. 1.1), une étape historique, l'aboutissement de plusieurs décennies de progrès théoriques et instrumentaux.

### 1.2.2 L'instrument PLANCK HFI

Nous survollerons maintenant l' "Instrument à Haute Fréquence" (HFI), embarqué à bord de la mission PLANCK [2]. Cette mission emportera deux instruments (LFI et HFI) en orbite autour du second point de Lagrange du système Terre-Soleil. Cet instrument devrait marquer d'un jalon l'histoire de la cosmologie. Il sera à même de fournir une carte des fluctuations de température sur

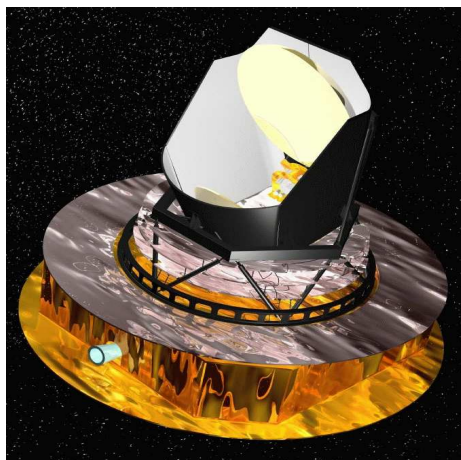


FIG. 1.2  
Le satellite PLANCK en configuration de vol.

---

tout le ciel, carte dont la précision sera limitée par le bruit de photon, *i.e.* les fluctuations quantiques de la radiation incidente dans les fréquences où le CMB domine ( $\lambda < 2.0$  mm).

Cette sensibilité exceptionnelle lui confère un statut d'*expérience ultime*, du moins pour l'intensité. Même si PLANCK (HFI+LFI) mesurera la polarisation du CMB (si elle existe et si l'estimation actuelle de son niveau est correcte), une mesure de la polarisation avec une telle précision fondamentalement limitée nécessitera certainement une future mission spatiale.

Cet instrument est constitué de 48 bolomètres (dont 25 polarisés) répartis en 5 voies entre 140 et 850 GHz, placés dans le plan focal d'un télescope Grégorien désaxé de 1.5 m. Ces bolomètres, dits en "toile d'araignée"<sup>9</sup> (fabrication Caltech/JPL), sont refroidis activement à 100 mK et seront couplés à des cornets à 4K afin d'assurer un taux de rejection angulaire important (voir figure 1.3), *i.e.* pour les ondes diffusées et diffractées ce qui est crucial afin d'éviter la pollution par des signaux forts tels la galaxie.

Quelques spécificités de cet instrument sont brièvement rappelées dans le tableau suivant.

---

<sup>9</sup>Ce concept vise avant tout à minimiser la section efficace des rayons cosmiques.

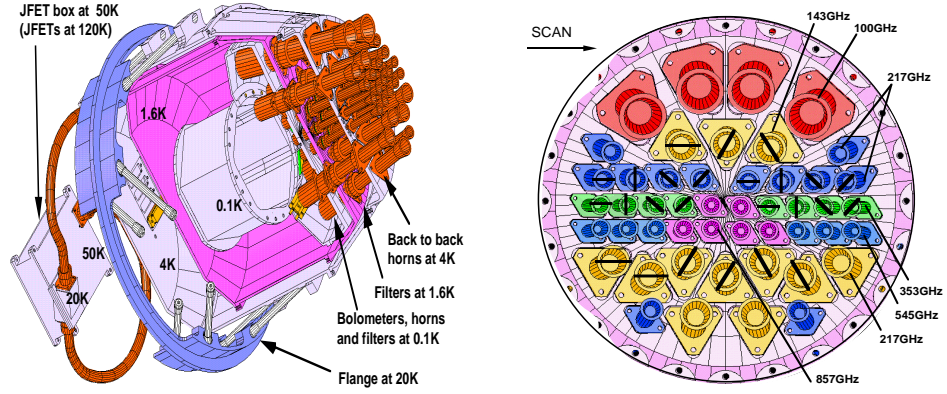


FIG. 1.3

L'instrument PLANCK - HFI : L'image de gauche est un plan en écorché illustrant l'architecture général de l'instrument HFI et l'image de droite montre une vue du plan focal, "vu du télescope".

$\nu$ (GHz)	100	143	217	353	545	857
FWHM (arcmin)	9.2	7.1	5.0	5.0	5.0	5.0
Nbre de détecteurs non polarisés	4	3	4	6	0	6
$\delta T/T$ I ( $\mu K/K$ )	2.0	2.2	3.5	14.0	147	6670
Nbre de détecteurs polarisés	0	9	8	0	8	0
$\delta T/T$ Q/U ( $\mu K/K$ )		4.2	8.1		140	

**Table 1.1** Quelques caractéristiques de l'instrument PLANCK - HFI pour 14 mois de missions. Les pixels sont pris de taille égale à la largeur à mi-hauteur (FWHM) du lobe instrumental supposé Gaussien. La résolution spectrale est de l'ordre de  $\nu/\Delta\nu = 3.34$  à toutes les fréquences.

## 1.3 Les données : modélisation et traitement

La première étape de toute analyse consiste à modéliser les mesures afin d'en déduire un traitement adéquat. Nous suivrons en cela [10] et [2].

### 1.3.1 Modèle de flot temporel

Les données sont constituées, pour chaque fréquence  $\nu$  de l'instrument par une suite temporelle de mesures, que nous noterons sous la forme d'un vecteur  $d_t^\nu$ .

Soit un flux incident  $\mathcal{F}^\nu(\theta)$  à la fréquence  $\nu$  et dans la direction  $\theta$ . Étant donné un instrument caractérisé par une réponse spectrale,  $v(\nu)$ , par une réponse optique effective ou lobe optique,  $w(\theta)$ , le flux  $\mathcal{S}^\nu(\theta)$  vu par cet instrument est

$$\mathcal{S}^\nu(\theta) = v \star w \star \mathcal{F}^\nu(\theta). \quad (1.1-a)$$

Ce flux est converti en un signal temporel discret par intégration sur un interval de temps  $\Delta_t$ . Aussi, si la fonction  $\theta(t)$  décrit la direction de pointage de l'instrument en fonction du temps, alors le  $i$ -ème échantillon des données peut s'écrire

$$d_{t_i}^\nu = \int_{t_i}^{t_i+\Delta_t} dt (\mathcal{S}^\nu(\theta(t)) + \mathcal{N}(t)) \quad (1.2-a)$$

où  $\mathcal{N}$  dénote le bruit instantané de l'instrument. De par cette discrétisation temporelle, seule une discrétisation du flux  $f_p^\nu$ , *i.e.* une carte pixelisée du flux, nous est accessible. On peut donc écrire une discrétisation de  $\mathcal{S}^\nu(\theta)$  :  $s_p^\nu = v \star w \star f_p^\nu$ . De cette manière, un échantillon temporel  $t_i$  peut se réécrire

$$d_{t_i}^\nu = \Pi_{t_i p_j} s_{p_j}^\nu + n_{t_i}^\nu, \quad (1.3-a)$$

où la somme entre les indices doublés est et sera implicite dorénavant. Si la pixelisation du ciel contient  $\mathcal{N}_p$  pixels et le vecteur de données  $\mathcal{N}_t$  échantillons, alors  $\Pi$  est une matrice  $\mathcal{N}_t \times \mathcal{N}_p$  décrivant la stratégie d'observation du ciel.

Le fait que la carte de CMB que l'on cherche corresponde uniquement à certains processus physiques parmi d'autres, requiert une étape supplémentaire dans la modélisation. Il s'agit de considérer le flux incident comme une somme de contributions d'origine physique distinctes. Notant  $g_\mu(\nu)$  la dépendance spectrale des processus contributeurs,  $\tau_{\mu p}$  leur flux pixelisé (incluant l'effet de  $v$  et  $w$ ) et  $\mathcal{N}_\mu$  leur nombre, on peut écrire

$$s_p^\nu = \sum_{\mu} g_\mu(\nu) \tau_{\mu p}. \quad (1.4-a)$$

Ainsi, finalement, le flot temporel de données sera modélisé sous la forme

$$d_{t_i}^\nu = \Pi_{t_i p_j} \sum_{\mu=1}^{\mathcal{N}_\mu} g_\mu(\nu) \tau_{\mu p_j} + n_{t_i}^\nu. \quad (1.5-a)$$

### 1.3.2 Traitement des données

#### Schéma *qualitatif* général

Une fois cette modélisation convenue, *une fois admises comme connues la matrice de pointage  $\Pi_{t p}$ <sup>10</sup>, ainsi que les réponses spectrales et optiques*

---

<sup>10</sup>Déterminé indépendamment ou non, *e.g.* grâce à un capteur solaire, stellaire, ou bien par interpolation à partir des détections des passages de la galaxie.



de l'instrument <sup>11 12</sup>, les différentes étapes du traitement des données, du flot temporel aux paramètres cosmologiques, découlent naturellement.

Elles peuvent être décrites succinctement comme suit :

1. nettoyage élémentaire du flot brut : suppression des données contaminées avec évidence (rayons cosmiques) et autre suppression de systématiques (décorrélation avec des bolomètres aveugles...)
2. passage du flot temporel nettoyé à une carte du ciel observée à différentes fréquences et estimation des propriétés de bruit du flot et de la carte ;
3. passage de ces cartes observées du ciel à des cartes de processus astrophysiques le composant ;
4. caractérisation statistique de la carte des anisotropies du CMB, *i.e.* spectre de puissance  $\mathcal{C}_\ell$ , fonctions de corrélations à 2, 3 ou  $n$ -points... et à leurs incertitudes associées
5. estimation à partir du spectre de puissance, par exemple, des paramètres des modèles cosmologiques ( $\Omega$ ,  $\Lambda$ ,  $n_s$  ...) et des incertitudes associées.

Ces différentes étapes ont été schématisées dans le cas de PLANCK sur l'image 1.4.

## Éléments de statistiques

De manière à transformer ce schéma élémentaire et idéal en une approche efficiente et rigoureusement définie, une approche statistique de type Bayésienne se révèle particulièrement riche. Cette approche nous oblige à rappeler quelques notions élémentaires de statistiques [11].

Soit tout d'abord  $T$  un jeu de paramètres, que l'on cherche à estimer, décrivant une collection de variables aléatoires  $D$ . Dans notre cas, la nature aléatoire du bruit nous autorisera à considérer le flot  $d_t$  comme une collection de variables aléatoires caractérisées par un jeu de paramètres cosmologiques  $T = (\Omega, \Lambda, n_s, \dots)$ .

Soit  $\hat{T}$  un estimateur de  $T$  dont la vraie valeur est  $\bar{T}$ . Alors  $\hat{T}$  sera dit *non-biaisé* si et seulement si  $\langle \hat{T} \rangle = \bar{T}$  où  $\langle \rangle$  dénote une moyenne d'ensemble. S'il existe, nous définirons le *meilleur estimateur non-biaisé* comme celui minimisant l'erreur sur chaque paramètre  $T_i$ , *i.e.* minimisant  $\sigma_i \equiv (\langle T_i^2 \rangle - \langle T_i \rangle^2)^{1/2}$  pour chaque  $T_i$ .

## Vers une description Bayésienne de ce schéma

Étant donné une réalisation de  $D$ , nous définirons l'estimateur de la théorie,  $\hat{T}$ , comme celle maximisant la *probabilité a posteriori* de la théorie étant donné les données,  $D : \mathcal{P}(T|D)$ .

<sup>11</sup>Déterminé au sol et en vol par calibration sur des signaux physiques bien connus tels que les planètes, le dipole cosmologique, ou bien grâce à des sources étalons embarquées.

<sup>12</sup>Cela ne sera toutefois exempt, ni de subtilités, ni de difficultés comme nous le verrons au chapitre 4.

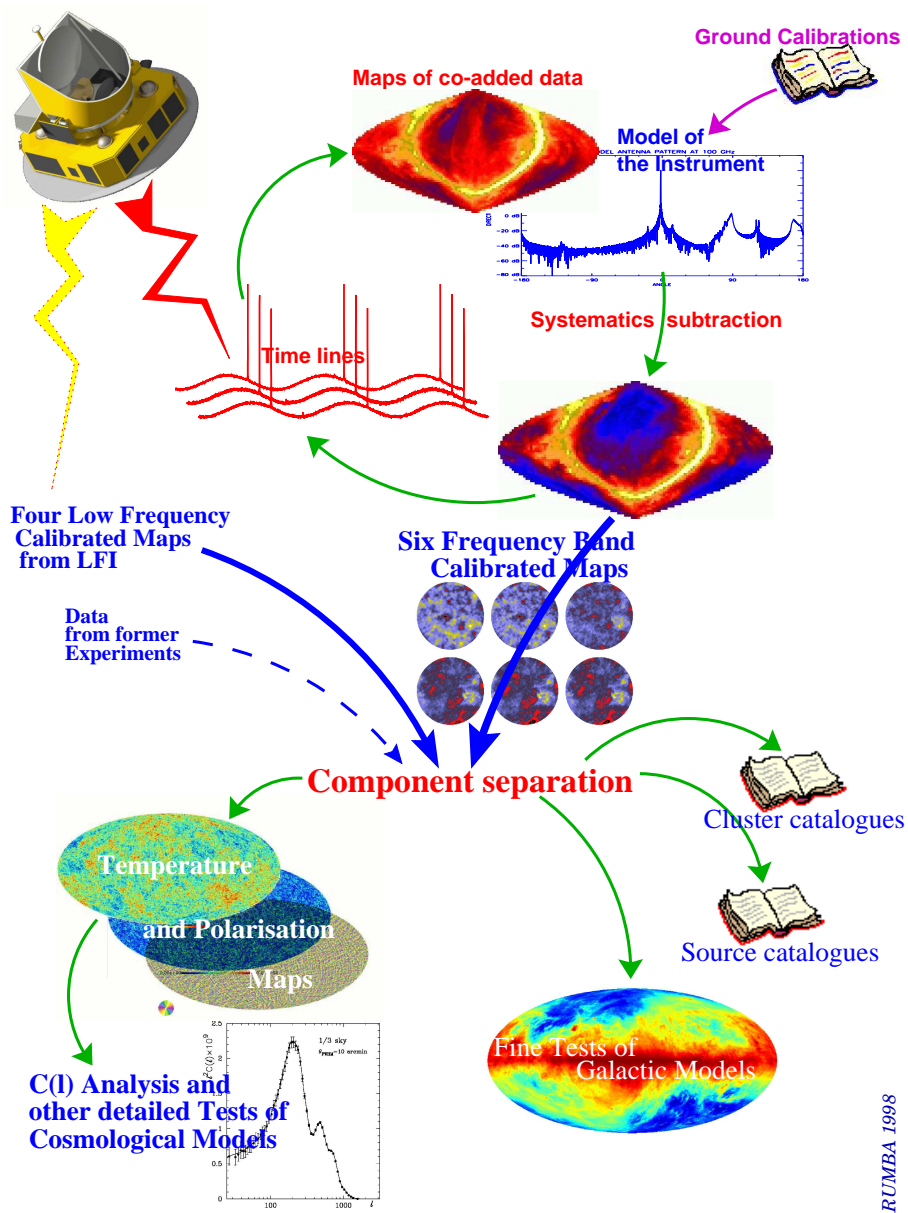


FIG. 1.4  
Des données ordonnées en temps aux paramètres cosmologiques. Cette figure illustre le schéma général des données tel qu'il est envisagée pour la mission PLANCK. Emprunté à [2]

L'usage du théorème de Bayes nous permet de réécrire la probabilité postérieure comme

$$\mathcal{P}(T|D) = \frac{\mathcal{L}(D|T)\mathcal{P}(T)}{\mathcal{P}(D)}, \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{L}(D|T)$  désigne la *fonction de vraisemblance* des données étant donné la théorie,  $\mathcal{P}(T)$  désigne la probabilité d'une théorie  $T$  *a priori*, et  $\mathcal{P}(D)$  l'*évidence* des données.

Ainsi, maximiser la *probabilité a posteriori* revient à maximiser le produit de la fonction de vraisemblance par la probabilité *a priori* puisque nous choisirons l'évidence constante (*i.e.* toutes les données sont équiprobables a nos yeux). Les estimateurs ainsi définis sont donc des *estimateurs de maximum de vraisemblance* avec un *a priori* uniforme.

Fort heureusement, alors que la probabilité *a posteriori* ne nous est pas accessible, il en va différemment de la fonction de vraisemblance, pourvu que les propriétés du bruit soient connues. Comme nous le verrons, de différents choix d'*a priori* découleront différentes méthodes.

### Propriétés générales des estimateurs de maximum de vraisemblance

Avant de rappeler quelques propriétés génériques et remarquables des estimateurs de maximum de vraisemblance [11], définissons tout d'abord la *matrice de Fisher* par

$$F_{ij} \equiv \left\langle -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial D_i \partial D_j} \right\rangle. \quad (1.7)$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance ont alors les propriétés suivantes :

- s'il existe un meilleur estimateur non-biaisé alors il minimise  $\mathcal{L}(D|T)$  ;
- le meilleur estimateur de vraisemblance est le meilleur estimateur non-biaisé dans la limite des grands nombres ;
- si les  $D_i$  sont décorellées, alors tout estimateur non biaisé satisfera aux *inégalités de Cramer-Rao* :

$$\sigma_i \geq \frac{1}{(F_{ii})^{1/2}}, \quad (1.8)$$

Si les autres paramètres  $D_j$  sont également déterminés en utilisant les données, alors leurs déviations standards minimales augmenteront,

$$\sigma_i \geq (F^{-1})_{ii}^{1/2}. \quad (1.9)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance est celui pour lequel ces inégalités sont des égalités.

## Du bien-fondé du schéma précédent : information et compression

La matrice de Fisher s'appelle aussi couramment matrice d'*information*. Cette dénomination est justifiée par le fait que, schématiquement, les (in)égalités de Cramer-Rao (Eq. (1.8) et (1.9)) relient les propriétés de la diagonale de cette matrice à la précision avec laquelle un jeu de données nous permet de mesurer certains paramètres. Les termes hors-diagonaux nous informent sur les corrélations entre les estimations de chaque paramètre. Aussi, cette matrice évalue la quantité d'information contenue dans ce jeu de données <sup>13</sup>.

Une fois cette interprétation formulée, une question survient à la lecture du schéma précédemment établi : chaque étape préserve-t-elle la quantité d'informations initialement contenue dans le flot temporel  $d_t$  ? La réponse positive permet, suivant [14, 15], de définir la notion de *compression sans pertes d'informations*.

En effet, même pour des expériences de type ballon contemporaines,  $\mathcal{N}_t \simeq 10^7$ . Aussi il serait simplement impossible en pratique de calculer la fonction de vraisemblance en question, calcul nécessitant un nombre d'opérations proportionnel à  $\mathcal{N}_t^3$ , et donc de confronter ces données aux multitudes de modèles habitant l'espace des paramètres cosmologiques que nous désirons explorer <sup>14</sup>. Il nous faut donc *compresser* ces données. La fabrication d'une carte réduit généralement ce chiffre à  $\mathcal{N}_p \simeq 10^5$ , progrès significatif mais insuffisant. L'étape ultime de cette compression sera en fait les quelques  $\simeq 100$  bins du spectre de puissance extrait de cette carte que nous comparerons aux modèles théoriques afin d'en déduire  $\simeq 10$  "paramètres du modèle cosmologique".

Notons que la démonstration de la non-perte d'information, par exemple dans la fabrication de cartes, n'est établie en toute rigueur que dans le cas où le signal et le bruit sont Gaussiens, ce qui n'est pas avéré en pratique. Ce point sera rediscuté plus tard.

## Vers une reformulation Bayésienne du schéma précédent...

Se rappelant la règle multiplicative des probabilités,

$$\mathcal{P}(D, T \mid I) = \mathcal{P}(D \mid I) \mathcal{P}(T \mid D, I) \quad (1.10)$$

nous pouvons réécrire le théorème de Bayes dans une formulation plus adéquate. Il est facile de montrer que, si  $I$  désigne une information *a priori* quelconque, ce théorème conduit directement à

$$\mathcal{P}(T \mid D, I) = \frac{\mathcal{P}(T \mid I) \mathcal{L}(D \mid I, T)}{\mathcal{P}(D \mid I)} \quad (1.11-a)$$

$$\propto \mathcal{P}(T \mid I) \mathcal{L}(D \mid I, T) \quad (1.11-b)$$

<sup>13</sup>Notons que cette interprétation en termes d'information est analogue à celle bien connue du concept d'entropie,  $\mathcal{S} \propto -\int \mathcal{P} \ln \mathcal{P}$ , propre à la *physique statistique*. L'information ou negentropie est l'équivalent de la précision [12, 13].

<sup>14</sup>Les scénarios de type inflation sont déterminés par la donnée de 12 paramètres dans les cas les plus standards.

où l'on a fait usage dans la seconde égalité du fait que la constante  $\mathcal{P}(D | I)$  apparaît comme une simple normalisation.

Armé de ces rappels, nous pouvons, suivant [16, 17], dérouler la chaîne de probabilité que nous considérerons en pratique.

Etant donné un flot temporel  $d_t^\nu$ , nous cherchons ultimement à trouver :

- une estimation du spectre de puissance du bruit dans le domaine temporel,  $N_{tt'} \equiv \langle n_t n_{t'} \rangle$  ;
- une collection de cartes du ciel à différentes fréquences, notés par la suite  $x_p^\nu$  avec une caractérisation du bruit sur la carte (par exemple sa matrice de variance) ;
- une caractérisation statistique de la carte des fluctuations de température, par exemple le spectre de puissance  $\mathcal{C}_\ell$  ;
- le jeu de paramètres  $\Theta = (\Omega, \Lambda, n_s \dots)$  décrivant les cartes de fluctuations du CMB.

Aussi, on désire maximiser par rapport à  $\Theta$ ,  $\mathcal{C}_\ell$ ,  $x_p^\nu$  et  $N_{tt'}$  la probabilité *a posteriori*

$$\mathcal{P}(\Theta, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu, N_{tt'} | d_t^\nu, I) \quad (1.12)$$

où  $I$  désigne l'ensemble des *a priori* non formulés explicitement. Nous la récrivons,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Theta, N_{tt'}, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu | d_t^\nu, I) &= \\ &\mathcal{P}(\Theta, N_{tt'}, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu | I) \mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, \mathcal{C}_\ell, \Theta, I) / \mathcal{P}(d_t^\nu | I) \\ &= \mathcal{P}(N_{tt'} | I) \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu | I) \mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I) / \mathcal{P}(d_t^\nu | I) \end{aligned} \quad (1.13-a)$$

où nous avons supposé que la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, \mathcal{C}_\ell, \Theta, I)$  ne dépend pas de  $\mathcal{C}_\ell$  et  $\Theta$  étant donné  $x_p^\nu$  et  $N_{tt'}$ . Réécrivant finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Theta, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu, N_{tt'} | I) &= \mathcal{P}(\mathcal{C}_\ell | \Theta, x_p^\nu, N_{tt'}, I) \mathcal{P}(\Theta, x_p^\nu, N_{tt'} | I) \\ &= \mathcal{L}(\mathcal{C}_\ell | \Theta, N_{tt'}, I) \mathcal{L}(x_p^\nu | \mathcal{C}_\ell, \Theta, N_{tt'}, I) \\ &\times \mathcal{P}(\Theta, x_p^\nu, N_{tt'} | I) / \mathcal{P}(x_p^\nu | \Theta, N_{tt'}, I), \end{aligned} \quad (1.14-a)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Theta, N_{tt'}, \mathcal{C}_\ell, x_p^\nu | d_t^\nu, I) &= \\ &\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I) \mathcal{L}(x_p^\nu | \mathcal{C}_\ell, \Theta, N_{tt'}, I) \mathcal{L}(\mathcal{C}_\ell | \Theta, N_{tt'}, I) \\ &\times \mathcal{P}(\Theta, N_{tt'} | I) / \mathcal{P}(d_t^\nu | I). \end{aligned} \quad (1.15-a)$$

Cette chaîne de fonctions de vraisemblance, non dénuée d'hypothèses que nous avons taché d'expliciter, demeure toutefois suffisamment générale pour englober l'ensemble du processus d'analyse des données. Sa compacité cache néanmoins l'effroyable complexité résidant derrière chacun de ces termes. Cette complexité, tant pratique que théorique, sera explicitée pour chacun de ces termes dans les différents chapitres de cette partie.

### ... et sa discussion

Néanmoins, nous allons dans un premier temps détailler succinctement chacun de ces termes et discuter leur implication pratique. Supposant que maximiser le membre de gauche revient à maximiser chaque terme du membre de droite (hypothèse forte et critiquable, dure à valider, mais doublement précieuse puisque pédagogique et représentative de la pratique où toutes ces opérations sont effectuées successivement<sup>15</sup>), cette égalité conduit à l'interprétation suivante.

- La fonction de vraisemblance constituant *le premier terme* désigne le passage d'un flot temporel à une carte pixelisée du ciel, *i.e.* l'étape de la fabrication de cartes qui fera l'objet du chapitre 2. Ayant besoin d'une connaissance précise des propriétés effectives du bruit, par exemple, son spectre de puissance  $\tilde{N}_f \equiv \langle \tilde{n}_f \tilde{n}_f^* \rangle$  où l'on a noté  $\tilde{n}$  la transformée de Fourier de  $n$ , par exemple, nous illustrerons comment marginaliser au moyen d'une approche itérative cette fonction, par rapport aux cartes  $x_p^\nu$  et par rapport au spectre de bruit.
- *Le second terme* est la fonction de vraisemblance qui sera maximisé lors de l'extraction du spectre de puissance de cartes de fluctuations. Cette étape sera illustrée au chapitre 3 par une approche multi-résolution. Notons que, pour des raisons pédagogiques, nous avons dissimulé à ce niveau une éventuelle opération de séparation des composantes qui pourrait être décrite en faisant usage des *a priori* exprimés dans l'avant-dernier terme (voir ci-dessous)<sup>16</sup>.
- Ce second terme peut également incorporer certains *a priori* pouvant être inclus dans l'étape de fabrication de cartes. Par exemple, dans l'hypothèse d'un champ Gaussien, la matrice de variance-covariance des fluctuations de température est complètement déterminée une fois le spectre de puissance  $\mathcal{C}_\ell$  donné. Ces points seront examinés plus en détail dans les chapitres 2 et 3.
- La fonction de vraisemblance constituant *le troisième terme* correspond à l'extraction des paramètres cosmologiques à partir du spectre de puissance. Cette étape ne sera pas abordée dans cette thèse. Notons qu'elle constitue certainement l'étape la plus "simple" de cette chaîne de processus. Même si elle doit être effectuée avec soin, elle est jusqu'à maintenant l'étape la plus immédiate.
- La fraction constituant le dernier terme est une simple constante de normalisation que nous ignorerons par la suite, même si le dénominateur peut avoir une interprétation de type fréquentiste en quantifiant l'adéquation entre les hypothèses générales et les données.

<sup>15</sup> Même si ces deux derniers points ne constituent pas des arguments...

<sup>16</sup> Notons qu'une séparation en deux étapes relève d'un certain arbitraire puisque l'on pourrait envisager, en théorie en moins, de déterminer directement les  $\mathcal{C}_\ell$  à partir du flot temporel. Ceci est réalisé, par exemple, dans une "méthode hamonique" comme nous le verrons par la suite.

### 1.3.3 Attentes et déceptions

Des considérations formelles précédentes, nous pouvons déduire une ébauche de protocole qui correspondra partiellement à l'organisation de cette partie. Toutefois celle-ci reprenant exclusivement les travaux publiés au cours de notre travail de thèse, certains points ne seront pas abordés.

Le chapitre 2 présentera un processus original de fabrication de cartes, que suivra un algorithme rapide d'extraction de spectres de puissances dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 4, nous fournirons les premiers pas vers un traitement analytique complet des effets systématiques dus à la non-symétrie du lobe instrumental, permettant ainsi de dépasser certaines hypothèses potentiellement limitantes, mais nécessaires jusqu'à présent à la fabrication de cartes.

Enfin, le chapitre 5 fournira un moyen de détection très sensible d'une éventuelle composante non-Gaussienne dans une carte de fluctuations de température. Nous le verrons, cette étape, arrivant comme une analyse des données déjà fournies par la chaîne précédente, possède des motivations physiques profondes.

Néanmoins, la déception de certains lecteurs sera certaine lorsqu'ils réaliseront que certains points ne seront pas abordés. Tout d'abord nous ne mentionnerons pas le problème de la séparation des composantes ni même tout ceux concernant le pré-traitement des données (travail colossal), notamment la calibration, l'extraction des sources ponctuelles...

# Bibliographie

- [1] M. Piat. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2001.
- [2] PLANCK Phase A study report, ESA.
- [3] J.R. Bond, R.G. Crittenden, A.H. Jaffe, and L. Knox. "computing challenges of the cosmic microwave background". *Computing in Science and Engineering*, 1999.
- [4] *Les Houches 1999 Summer School*, lecture by Jean-Loup Puget, proceedings by F.R. Bouchet, J.-L. Puget, J.-M. Lamarre, EDP Sciences, 2000.
- [5] G. Hinshaw. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference "Mining the sky"*, Garching, 2000.
- [6] P. de Bernardis, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, G. De Gasperis, P. C. Farese, P. G. Ferreira, K. Ganga, M. Giacometti, E. Hivon, V. V. Hristov, A. Iacoangeli, A. H. Jaffe, A. E. Lange, L. Martinis, S. Masi, P. V. Mason, P. D. Mauskopf, A. Melchiorri, L. Miglio, T. Montroy, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, S. Prunet, S. Rao, G. Romeo, J. E. Ruhl, F. Scaramuzzi, D. Sforza, and N. Vittorio. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404 :955–959, April 2000.
- [7] S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. de Bernardis, P. G. Ferreira, V. V. Hristov, A. H. Jaffe, A. E. Lange, A. T. Lee, P. D. Mauskopf, C. B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, B. Rabii, P. L. Richards, G. F. Smoot, R. Stompor, C. D. Winant, and J. H. P. Wu. MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of  $10^{-5}$  deg. *ApJ Let.*, 545 :L5–L9, December 2000.
- [8] A. Benoit *et al.* . Archeops : A high resolution, large sky coverage balloon experiment for mapping cmb anisotropies. *AstroParticle Physics*, May 2001.
- [9] C. Pryke *et al.* . Cosmological Parameter Extraction from the First Season of Observations with DASI. *soumis a ApJ*, 2001.
- [10] F. R. Bouchet and R. Gispert. Foregrounds and cmb experiments i. semi-analytical estimates of contamination. *New Astronomy*, 4 :443–479, November 1999.



- [11] M. Kendall and M. Stuart. *The advanced theory of statistics*. Charles Griffin & Company limited, London, 1968.
- [12] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Physique Statistique*. Éditions MIR, Moscou, 1971.
- [13] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. "*Physique Statistique*". Hermann, 1989.
- [14] M. Tegmark. A method for extracting maximum resolution power spectra from microwave sky maps. *MNRAS*, 280 :299–308, May 1996.
- [15] M. Tegmark. How to measure CMB power spectra without losing information. *Phys. Rev. D*, 55 :5895–5907, May 1997.
- [16] P.G. Ferreira and A. H. Jaffe. Simultaneous estimation of noise and signal in cosmic microwave background experiments. *MNRAS*, 312 :89–102, February 2000.
- [17] J.R. Bond and R.G. Crittenden. Cmb analysis. In *NATO ASI Structure Formation in the Universe*, eds. R.G. Crittenden and N.G. Turok (Kluwer), 2001.

## Chapitre 2

# De la fabrication de cartes...

Comme nous l'avons esquissé précédemment, la première étape du processus d'analyse des données CMB, une fois celles-ci nettoyées des artefacts les plus évidents, est la fabrication de cartes.

A l'heure où nous avons commencé nos travaux de thèse, l'étude de ce problème était urgemment motivé par les besoins de l'expérience ARCHEOPS et la préparation de la mission PLANCK, mais aussi par différentes expériences en cours. Une solution à ce problème a été l'objet de notre première publication [1, voir appendice .1]. Elle est le fruit d'une collaboration avec Romain Teyssier, François R. Bouchet, Didier Vibert et Simon Prunet.

Dans la section 2.1 de ce chapitre, nous discuterons quelques subtilités théoriques propres à la maximisation de la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt}, I)$  introduite dans l'équation (1.15). De cette discussion découlera le choix d'une méthode particulière. Après avoir détaillé dans la section 2.2 les difficultés pratiques de ces méthodes, nous exposerons dans la section 2.3 notre solution. Ses performances seront démontrées sur des simulations dans la section 2.4, puis elle sera étendue à une évaluation du bruit dans la section 2.5. Nous en profiterons pour étudier plus en détail l'évaluation des propriétés du bruit sur la carte. Enfin la méthode sera discutée et comparée à d'autres, pré-existantes, dans la section 2.6.

Dans ce chapitre, nous nous restreindrons à la situation où le ciel est observé par un instrument unique opérant à une fréquence unique. Ces deux limitations peuvent être levées de façon triviale [2, 3]. Nous ne nous intéresserons également qu'à une mesure de l'intensité du flux incident, sans nous soucier de *sa polarisation*. En combinant deux mesures distinctes polarisées, un tel algorithme demeure naturellement applicable. Cette extension, aisée, est en cours.

Avant d'exposer ces détails, il convient de rappeler les motivations de cette étape. Même s'il nous était possible de passer directement du domaine temporel aux paramètres cosmologiques ou aux  $\mathcal{C}_\ell$  (comme, par exemple, dans l'approche

harmonique défendue pour PLANCK [4]), nous désirerions obtenir une carte des observations car :

- il est impensable de se passer d'un contrôle visuel ;
- même si une carte de fluctuations Gaussiennes de type CMB peut-être avantageusement compressées en ces  $\mathcal{C}_\ell$ , ce n'est pas le cas des autres processus astrophysiques, qui ne sont la plupart du temps que décrit dans "l'espace des pixels", d'où le fait que toute comparaison avec des observations pré-existantes de processus distincts du CMB (*e.g.* cartes d'émission galactique d'avant-plan) se fera par l'intermédiaire de cartes ;
- une carte des fluctuations, pourvu que ces propriétés de bruit soient connues, permet une caractérisation de ces fluctuations, par exemple, par une mesure de leur moment à trois points...
- la taille colossale des jeux de données actuelles impose cette étape de compression.

Dans cette exposé, certains points techniques suivront de très près notre publication [1] reproduite en annexe.

## 2.1 D'un choix théoriquement motivée : une méthode à la *COBE*...

En toute rigueur, afin de définir complètement la méthode employée pour passer du domaine temporel, où sont définies les données, au domaine spatial, nous avons besoins des trois termes

$$\mathcal{L}(d_t | x_p, N_{tt'}, I), \mathcal{L}(x_p^\nu | \mathcal{C}_\ell, \Theta, N_{tt'}, I) \text{ et } \mathcal{P}(N_{tt'} | I) \quad (2.1)$$

de l'équation (1.15), *i.e.* de la fonction de vraisemblance et des *a priori*. On a omis la dépendance en  $\nu$  puisqu'on ne considère ici qu'une seule fréquence.

Ces trois termes doivent être maximisés simultanément par rapport au bruit (ou de manière équivalente sous certaines hypothèses sur lesquelles nous reviendrons à son spectre  $\tilde{N}_f$ ) et aux cartes  $x_p^\nu$ . Même si ce problème ne correspond pas à la situation rencontrée en pratique, *nous supposons, dans un premier temps, un a priori parfait sur la connaissance du bruit*. Dans ce cas, le terme  $\mathcal{P}(N_{tt'} | I)$  de l'équation (2.1) devient un Dirac, et  $N_{tt'}$  devient un simple paramètre. Nous nous dispenserons de cette hypothèse supplémentaire dans la section 2.5.

Simplifiant les notations introduites en 1.3.1, le problème apparaît comme un problème d'algèbre élémentaire. En effet, suivant [5] et [6], nous pouvons écrire,

$$d_t = A_{tp} x_p + n_t, \quad (2.2)$$

où  $A_{tp} x_p$  désigne le signal observé sur une carte inconnue du ciel à cette fréquence,  $x_p$ . La matrice  $\mathcal{N}_{tod} \times \mathcal{N}_{pix}$  de pointage, incorpore donc le lobe instrumental et la stratégie d'observation. Nous incorporons un éventuel facteur de calibration dans  $d_t$  si bien que  $d_t$  et  $x_p$  ont des unités analogues.

Simplifiant une fois encore le problème, nous supposons que le lobe instrumental est bien symétrique ce qui nous permet, considérant toutes les orientations avec lesquelles un pixel est observé comme équivalentes, de *considérer  $x_p$  comme une carte convolée du ciel*. Dans ce cas, pour les expériences de mesure de puissance totale qui nous intéressent (*i.e.* mesures non différentielles), la structure de  $A$  se simplifie puisque les seuls éléments non nuls de  $A$  sont unitaires. Le modèle des données est alors simple : chaque échantillon temporel est la somme de la valeur du pixel observé et du bruit instrumental.

Pour définir l'estimateur de maximum de vraisemblance  $\hat{x}_p$  de  $x_p$ , nous devons, tout d'abord, calculer la fonction de vraisemblance

$$\mathcal{L}(d_t | x_p, N_{tt'}, I) . \quad (2.3)$$

Pour ce faire, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur le bruit. En effet, si l'on suppose que *le bruit est Gaussien*, alors on peut écrire

$$\mathcal{L}(d_t | x_p, N_{tt'}, I) \propto \exp(-n_t^T N_{tt'}^{-1} n_t / 2) \quad (2.4-a)$$

$$\propto \exp(-(d - Ax)_t^T N_{tt'}^{-1} (d - Ax)_{t'} / 2) \quad (2.4-b)$$

$$\propto \exp(-\chi^2 / 2) . \quad (2.4-c)$$

Enfin, de la nature des *a priori* considérés à travers le terme  $\mathcal{P}(x_p^\nu | \Theta, \mathcal{C}_\ell, I)$  dépendra la définition complète de la méthode.

- En l'absence de prior, l'équation 2.4 indique que maximiser  $\mathcal{L}$  revient à trouver la solution de moindre  $\chi^2$ . Cela mène naturellement à un estimateur linéaire de  $x_p$  :

$$\hat{x}_p = W_{pt} d_t \quad \text{avec} \quad W = [A^T N^{-1} A]^{-1} A^T N^{-1} . \quad (2.5)$$

Cette solution a été appliquée pour la première fois aux données de l'expérience *COBE* [7]. Son interprétation est simple. Si le bruit est homogène et décorré,  $N_{tt'}^{-1} = 1/\sigma^2 \delta_{tt'}$  et  $W$  n'effectue qu'une simple moyenne. Si le bruit est inhomogène,  $N_{tt'}^{-1} = 1/\sigma_t^2 \delta_{tt'}$ ,  $W$  effectue une moyenne pondérée en  $1/\sigma_t^2$ .

- Un *a priori* naturellement motivé en cosmologie consiste à supposer la Gaussianité du signal. Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, et comme nous le rediscuterons dans la section 5, cette hypothèse possède des motivations physiques profondes. Pourvu que soit valide l'hypothèse de Gaussiannité du bruit sur la carte, alors le terme  $\mathcal{L}(x_p^\nu | \Theta, \mathcal{C}_\ell, I)$  peut s'écrire comme

$$\mathcal{L}(x_p^\nu | \Theta, \mathcal{C}_\ell, I) \propto \exp(-x_p^T S_{pp'}^{-1} x_{p'} / 2) \quad (2.6)$$

où  $S_{pp'}$  désigne la matrice de covariance du signal sur la carte. Notons que, naturellement, à  $\Theta$  donné, et donc à des  $\mathcal{C}_\ell$  donnés, correspond une seule matrice, comme nous le détaillerons dans le chapitre 3. La maximisation du terme 2.1 conduit naturellement à un filtrage de Wiener bien

connu en traitement du signal et appliqué récemment dans un contexte astrophysique [8, 9, 10, 11], les deux derniers proposant une généralisation multi-fréquences et multi-résolutions. Schématiquement, ce filtrage est une pondération en fonction du rapport signal sur bruit. Dans notre cas, cela conduit à deux solutions formellement équivalentes, mais aux implications pratiques différentes [6] :

$$\hat{x}_p = W_1 p_t d_t \quad \text{avec} \quad W_1 = [S^{-1} + A^T N^{-1} A]^{-1} A^T N^{-1}, \quad (2.7)$$

et

$$\hat{x}_p = W_2 p_t d_t \quad \text{avec} \quad W_2 = S A^T [A S A^T + N]^{-1}. \quad (2.8)$$

On montrera facilement que  $W_1 = W_2^{-1}$ . Le filtrage de Wiener sera donc le meilleur estimateur de  $x_p$  dans le sens précédemment défini, uniquement dans le cas où bruit et signal sont supposés Gaussien.

- Alors que les deux méthodes précédentes conduisent à un estimateur linéaire, d'autres formes d'*a priori* conduisent rarement à des solutions analytiques, mais permettent par contre de se dispenser de l'hypothèse de Gaussiannité. Parmi celles-ci, les estimateurs dits de "Maximum d'Entropie" ont été appliqués avec succès au problème de la séparation des composantes [12, 13], quasi-analogue formellement, mais jamais au problème de la fabrication de cartes où il serait probablement trop coûteux. Ceux-ci s'obtiennent simplement dans le cas où  $x_p > 0$  par la limite d'une distribution de Poisson,  $P_n = \mu^n e^{-\mu} / n!$  [14]. En effet, dans la limite de validité de la formule de Stirling,

$$\ln n! = \Gamma[1 + \mu\xi] \quad \text{ou} \quad \xi = x_p / \mu \quad (2.9-a)$$

$$\simeq \mu\xi \ln(\mu\xi) - \mu\xi + \ln(2\pi\mu\xi)/2 \quad \text{d'où} \quad (2.9-b)$$

$$\ln \mathcal{P}(x_p | \Theta, \mathcal{C}_t, I) = (-\xi \ln \xi + \xi - 1)\mu \quad (2.9-c)$$

où l'on reconnaît un terme d'entropie  $\xi \ln \xi$  de type Boltzman avec la contrainte  $\langle \xi \rangle = 1$  et où  $\mu$  est une mesure dans cet espace de probabilités. L'origine Poissonnienne de cet *a priori* le rend particulièrement adéquat pour les sources ponctuelles, pour lesquelles il semble plus performant qu'un *a priori* Gaussien.

Le choix que nous avons fait a donné des résultats satisfaisant dans le contexte des expériences ARCHEOPS, TopHat et PLANCK. Ce choix est analogue à celui effectué par les expériences BOOMERanG et MAXIMA [15, 16, 17]. Il consiste à ambitionner un filtrage de Wiener. À cette fin, une solution de type *COBE* est tout d'abord cherchée. De celle-ci est déduite une première évaluation du spectre de puissance et donc de  $S_{pp'}$ , ce qui rend alors possible l'application d'un filtrage de Wiener.

La deuxième étape étant suffisamment simple une fois qu'elle est effectuée dans l'espace des harmoniques sphériques (pourvu que l'on tienne compte des effets dus à la couverture finie). Nous nous concentrerons ici sur la première étape : l'obtention de la solution de moindre carré.

<sup>1</sup>Ceci utilise l'astuce suivante, valide tant que  $R$  et  $S$  sont deux matrices inversibles :  $(R + S)^{-1} = (1 - R^{-1}S + (R^{-1}S)^2 + \dots)S^{-1}$ .

## 2.2 ...aux difficultés de leur implémentation...

L'examen de quelques ordres de grandeur nous pousse à des considérations plus pratiques. En effet, pour l'obtention de la solution de moindre  $\chi^2$ , l'estimateur linéaire de  $x_p$  s'écrit :

$$\hat{x} = [A^T N^{-1} A]^{-1} A^T N^{-1} d \quad (2.10)$$

La matrice de covariance du bruit est de dimension,  $\mathcal{N}_t \times \mathcal{N}_t$  alors que la matrice de pointage  $A$  est une matrice  $\mathcal{N}_t \times \mathcal{N}_p$ . Se rappelant que pour une expérience de type ARCHEOPS,  $\mathcal{N}_t \simeq 10^7$  et  $\mathcal{N}_p \simeq 10^5$ , nous réalisons que, naïvement, nous espérons inverser des matrices  $10^5 \times 10^5$ , processus impossible dans un délai raisonnable étant donné la puissance de calcul aujourd'hui accessible.

Alors que les expériences de la génération précédente pouvaient réaliser une carte par simple manipulation de la matrice, le nombre d'opérations requises par ce type d'approche, proportionnel à  $\mathcal{N}_p^3$ , a poussé de manière déraisonnable les limites des super-calculateurs actuels : reprenant les estimations de Borrill [18], une implémentation directe de cette algorithmique, pour  $\mathcal{N}_p \sim 3 \times 10^4$  et  $\mathcal{N}_t \sim 2 \times 10^6$  nécessiterait 16Tb de stockage sur disque (en simple précision), 7 Gb de RAM (en double précision) et  $2.4 \times 10^{17}$  opérations soit 12 ans sur un processeur à 600 MHz... Un travail sur ces algorithmes s'impose donc.

Une première approche, partiellement suffisante jusqu'à l'analyse des données BOOMERanG-LDB a consisté à exploiter les structures simples des matrices impliquées. La matrice  $A$  est *creuse*, comme nous l'avons déjà mentionné, et la matrice  $N_{tt'}$  (et donc son inverse) est stationnaire et bande diagonale, si l'on fait l'hypothèse de la stationnarité du bruit, et si l'on néglige des corrélations du bruit à trop grande portée :

$$N_{tt'}^{-1} = f(|t - t'|) \quad (2.11-a)$$

$$= 0 \quad \forall |t - t'| > \tau \ll \mathcal{N}_t. \quad (2.11-b)$$

Le code MADCAP <sup>2</sup> [18] constitue l'implémentation la plus achevée de ces simples hypothèses (complété par l'estimation du spectre de puissance selon une méthode du type Newton-Raphson). Ce type de méthode a donné des résultats satisfaisants pour  $N_p \sim 15000$  par l'emploi massif de super-calculateurs type CRAY T3E à 512 processeurs. Ce genre d'approche n'a pas encore atteint ses limites et d'autres techniques plus sophistiquées de calcul numérique sont à l'étude [19]. Quelques chiffres seront avancés dans le chapitre suivant.

Pour pallier à ces insuffisances, une approche moins générale consiste à exploiter les structures induites dans les matrices précédentes par des symétries de la stratégie d'observation. Cela a été proposé par [20] dans le cas de l'expérience MAP. Poussant cette approche encore plus loin, il a été proposé, à partir d'un algorithme de convolution rapide exploitant les symétries propres à une stratégie d'observation idéale de PLANCK [21], d'effectuer une véritable

---

<sup>2</sup><http://www.nersc.gov/~borrill/cmb/madcap.html>

déconvolution afin de déduire directement les coefficients,  $a_{\ell m}$ , d'une décomposition en harmonique sphérique du ciel (voire chapitre le 4 pour plus de détails). De ceux-ci, une carte n'est qu'un produit facilement dérivable. Cette approche, prometteuse, n'a pas encore démontré toute sa faisabilité et risque d'être, en pratique, particulièrement sensible à certaines hypothèses critiques telle que la stationnarité du pointage.

Aucune réponse générale n'existe donc. Ce type de calcul nécessite urgemment l'invention de nouveaux algorithmes, dont nous proposons ici un exemple : un algorithme Jacobi multi-grille.

## 2.3 ...à leur solution : une approche itérative multi-grille.

Parallèlement aux approches évoquées ci-dessus, des approches plus rapides et moins gourmandes en RAM ont été développées [5, 22].

Leur principe, bien connu, consiste à éviter de manipuler des matrices entières en manipulant uniquement des vecteurs. Ceci se fait au moyen d'*algorithmes d'inversion itératifs*<sup>3</sup> [23, 24]. Le fait de se limiter à des vecteurs limite l'usage de la RAM, la rapidité étant directement liée au nombre d'itérations requis.

Notre méthode consiste à employer comme intermédiaires de calcul des sous-espaces (spatiaux et temporels) de résolutions moindres. Aussi, avant d'exposer les détails de la méthode, il convient d'introduire la notion de résolution en pratique.

### Définir la résolution

La pixelisation utilisée est une pixelisation de la sphère, hiérarchique, de surface constante de pixels (à une résolution donnée), où ceux-ci sont placés sur des isolatitudes de façon à pouvoir utiliser des transformées de Fourier rapide sur cette "direction" au moins. Elle est disponible à travers les codes HEALPix [25].

Dans ce schéma, la sphère est divisée en 12 pixels de base récursivement divisés. Le paramètre de résolution est  $N_{side}$  : le nombre de pixels le long d'un coté de ces pixels de base. Le nombre de pixels total est donc  $N_{pix} = 12N_{side}^2$ . Par commodité, nous définirons le niveau de résolution  $k$  comme  $N_{side} \equiv 2^k$ . Dans notre cas, la structure récursive, particulièrement visible dans la numérotation "en nid", nous permettra de raffiner ( $k \rightarrow k + 1$ ) ou de dégrader la résolution ( $k + 1 \rightarrow k$ ) très facilement.

La question se pose également de déterminer la résolution maximale à laquelle nous désirons travailler. Celle-ci est déterminée par deux contraintes contradictoires : i/ le bruit de pixelisation, *i.e.* l'erreur due à l'attribution d'une même valeur de signal à tous les échantillons temporels observant un même pixel

---

<sup>3</sup>Consulter <http://www.netlib.org>

(erreur non liée à des effets de lobe instrumental) ; erreur qu'il faut rendre négligeable devant le bruit instrumental par échantillon temporelle, ce qui pousse à réduire la taille des pixels (voire [1] pour plus de détails) ii/ la nécessité d'avoir un rapport signal sur bruit raisonnable par pixel, contrainte qui tend à accroître la taille des pixels.

La détermination de la résolution  $k_{max}$  satisfaisant à de tels critères se fera par expérience numérique, puisqu'elle dépend de la variabilité du signal à l'échelle d'un pixel. La plupart des expériences CMB sont largement dominés, par le bruit dans le domaine temporel, ce qui contraint la pixelisation à être du même ordre de grandeur que le lobe instrumental.

### Un algorithme itératif : l'algorithme de Jacobi approximé...

Considérons désormais la résolution de travail déterminé,  $k_{max}$ .

Au lieu de chercher à trouver  $\hat{x}_p$ , nous effectuerons le changement de variable suivant, en définissant  $\hat{y}_p$  par

$$\hat{y} = \hat{x} - P d \quad (2.12)$$

puis résoudrons  $\hat{y}$  qui obéit à l'équation

$$PN^{-1}A \hat{y} = PN^{-1}(d - APd) \quad \text{ou} \quad M\hat{y} = b \quad (2.13)$$

où nous avons multiplié de part et d'autre par  $(A^T A)^{-1}$  et défini l'opérateur de co-addition  $P \equiv (A^T A)^{-1} A^T$ . Notons que  $A$  s'interprète comme un opérateur d'observation, puisque  $d = Ax$  définit le flot temporel obtenu en observant la carte  $x$ .  $A^T$ , lui, est un opérateur de projection, puisque permettant de passer d'un flot temporel à une carte.

Le précédent changement de variable nous permet en fait *de soustraire le signal du flot temporel* : l'observation d'une carte obtenue par simple coaddition  $APd$  contient le même signal que le flot temporel initial  $d$  pourvu que le bruit de pixelisation soit négligeable, ce dont on s'est assuré par le choix de la résolution. Aussi notre fabrication de cartes se fera en deux étapes : le calcul d'une simple carte coadditionnée,  $Pd$ , puis ensuite la résolution de l'équation (2.13) pour la carte de bruit  $\hat{y}$ .

Notons, qu'en principe, ce changement de variable qui rend la carte de bruit complètement indépendante du signal est inutile, puisque la matrice à inverser est inchangée. Numériquement, toutefois,  $d - APd$  est privé de variations à haute fréquence (en plus des harmoniques de la fréquence de rotation) dommageable à l'inversion, comme par exemple le signal galactique dans le cas d'ARCHEOPS.

Afin de résoudre l'équation (2.13), nous suivons [22] et appliquons une méthode de relaxation de Jacobi :



$$\begin{aligned}
\hat{y}^0 &= 0 \\
\hat{y}^{n+1} &= R\hat{y}^n + D^{-1}b \quad \text{jusqu'à la convergence} \\
\text{ou} \quad D &= \text{diag}(M) = \text{diag}(PN^{-1}A) \\
\text{et} \quad R &= I - D^{-1}M
\end{aligned}$$

que nous approximations en considérant que  $D \simeq I$ . Cette approximation est nécessaire pour supprimer le coût d'évaluation prohibitif de la diagonale de  $M$ . Le schéma itératif se simplifie alors en :

$$\begin{aligned}
\hat{y}^0 &= 0 \\
\hat{y}^{n+1} &= R\hat{y}^n + b \quad \text{jusqu'à la convergence} \\
\text{avec} \quad R &= P(I - N^{-1})A .
\end{aligned}$$

Se rappelant que  $PA = I$ , il est évident que si ce schéma converge, c'est vers la solution de Eq. (2.13). Cette convergence est démontrée simplement ci-dessous.

Il importe de définir *un critère de convergence* de manière à limiter le nombre d'itérations. Celui que nous adopterons par la suite, simple et prudent, consiste à cesser d'itérer lorsque la norme des résidus (définis ci-dessous) est plus faible qu'un dixième de celle du bruit attendu sur la carte. Itérer plus avant serait inutile.

La philosophie d'un schéma itératif consiste à remplacer une unique opération coûteuse (pour nous une inversion) en une succession d'opérations (vectorielles), peu coûteuses. Écrit ainsi, notre schéma ne satisfait pas encore à ce second critère puisque l'application (le stockage même) répétée de  $N^{-1}A$  à  $\hat{y}^n$  est prohibitif ( $\propto \mathcal{N}_t \mathcal{N}_p^2$ ), quand bien même nous connaîtrions  $N^{-1}$ . Cette difficulté est facilement contournée sitôt que l'on fait l'hypothèse (réaliste mais à vérifier) de la *stationnarité* du bruit. En effet, ceci implique une matrice de covariance du bruit ayant une structure de type Toeplitz, que nous considérerons comme circulante en négligeant les effets de bord <sup>4</sup>, ce qui se traduit dans l'espace de Fourier par une structure diagonale <sup>5</sup> [26, 19]. Naturellement, la diagonale est constituée par le spectre de puissance du bruit,  $\tilde{N}_f$ . Notons que ce fait bien connu n'est qu'une reformulation du classique *théorème de convolution*, puisqu'une multiplication par une matrice circulante est une convolution, qui se traduit donc par une multiplication en espace de Fourier.

<sup>4</sup>Les effets de bords non désirés interviennent car, sous l'hypothèse de circularité,  $N_1 \mathcal{N}_t = N_{t-t-1}$  par exemple, ce qui naturellement faux. Les négliger est possible car  $\mathcal{N}_t \gg \tau$  où  $\tau$  est une échelle de temps caractéristique de la corrélation du bruit.

<sup>5</sup>La stationnarité du bruit, c'est à dire l'invariance par translation de la fonction de corrélation du bruit, *i.e.*  $\langle n_t n_{t'} \rangle = f(|t - t'|)$  entraîne  $\langle \tilde{n}_f \tilde{n}_{f'} \rangle = \tilde{N}_f \delta_{ff'}$ .

Nous arrivons donc à un opérateur d'itérations,  $R$ , très peu coûteux à appliquer à  $\hat{y}^n$ . Ceci se fait en cinq étapes :

- "Observation" de  $\hat{y}^n$
- Transformation de Fourier du flot temporel correspondant
- Application du filtre passe-bas  $W = I - N^{-1}$
- Transformation de Fourier inverse
- Co-addition du flot temporel résultant dans la carte  $\hat{y}^{n+1}$ .

Notons dès à présent que la rapidité de ce schéma, lorsqu'appliqué à des données de taille courante, sera naturellement limitée par les deux transformations de Fourier nécessaires, ce qui impose donc un nombre d'opérations  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t)$ . Cette loi est un grand progrès par rapport aux lois de puissance précédemment mentionnées, progrès substantiel mais encore insuffisant si ces opérations doivent être effectuées un trop grand nombre de fois, *i.e.* si le nombre d'itérations est trop important. La réduction de ce dernier sera donc notre souci, et constituera sans aucun doute le principal succès de notre approche.

... à la convergence robuste mais lente.

Démontrons maintenant, sommairement, la convergence de cet algorithme "Jacobi approximé" en supposant une forme typique d'un bruit en  $1/f$  caractéristique des instruments nous intéressant :  $\tilde{N}_f = 1 + (f_0/f)^\alpha$ . Le filtre passe-bas associé à  $W$  est alors  $W(f) = f_0^\alpha / (f_0^\alpha + f^\alpha)$ . Puisque les opérateurs  $A$  et  $P$  sont des opérateurs préservant la norme, la norme de l'incrément,  $\Delta \hat{y}^n \equiv \hat{y}^n - \hat{y}^{n-1}$  décroît à chaque itération comme  $\|\Delta \hat{y}^{n+1}\| \leq W(f_{min}) \|\Delta \hat{y}^n\|$  où  $f_{min}$  est une fréquence minimale dans le problème. Puisque  $W(f_{min}) < 1$ , l'algorithme *convergera de manière robuste*, ce qui est rassurant... Toutefois, puisqu'en pratique  $W(f_{min}) \simeq 1$ , cette convergence sera lente pour les modes spatiaux correspondant. Cette déficience bien connue des itérateurs de Jacobi a un remède : une approche multi-grille.

Pour s'en convaincre nous anticipons sur la section 2.4 en illustrant sur des simulations de l'expérience ARCHEOPS, la carte des résidus en fonction du nombre d'itérations. Nous reviendrons plus tard sur ces notions, mais rappelons d'abord la définition de l'erreur à l'itération  $n$ ,  $e^n \equiv \hat{y}^n - \hat{y}^\infty$ , et du résidu,  $r^n \equiv M\hat{y}^n - b$ .

Le nombre d'itérations ainsi nécessaire jusqu'à la convergence est bien trop important, au point que pour l'expérience ARCHEOPS, il pénaliserait lourdement cette étape de l'analyse des données. Il faut donc accélérer cet algorithme en réduisant le nombre d'itérations. Les structures à grandes échelles de plus en plus marquées illustrent la difficulté que ces grands modes ont à converger. Ce dernier point suggère naturellement d'accélérer la convergence en résolvant de

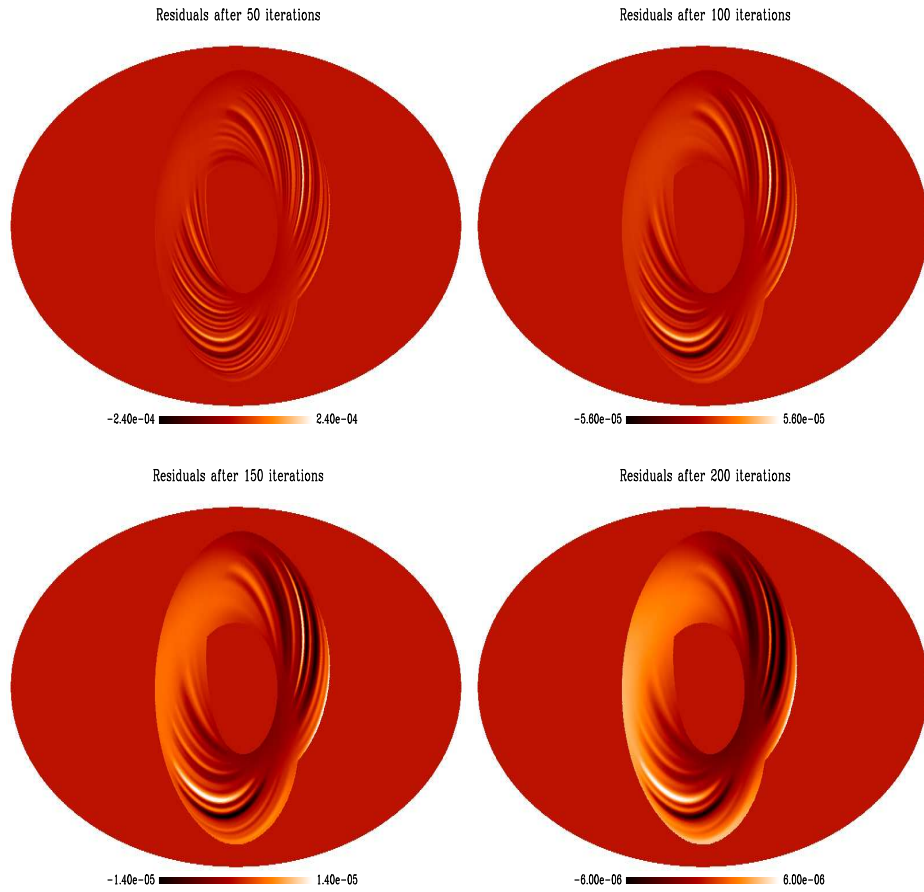


FIG. 2.1

Cartes des résidus après 50, 100, 150 and 200 itérations pour la méthode de Jacobi approximée. Ceci a été effectué sur les données simulées d'un seul bolomètre avec un niveau de bruit nominal. La couverture du ciel correspond a celle de vol d'ARCHEOPS de Kiruna. Les structures des résidus à grande échelle illustrent la lente convergence de ces modes. Les zones libres de stries correspondent aux zones de forte redondance.

---

manière privilégiée ces grands modes. Ceci peut se faire au moyen de techniques multi-grilles [24].

## Une méthode de relaxation multi-grille

Généralisons les considérations précédentes à un niveau  $k$  et définissons, comme précédemment, erreurs et résidus,  $e_k^n = \hat{y}_k^n - \hat{y}_k$  et  $r_k^n = M_k \hat{y}_k^n - b_k$ . Les deux sont reliés par

$$M_k e_k^n = r_k^n . \quad (2.16)$$

Naturellement, une fois ce système résolu à la résolution  $k = k_{max}$ ,  $\hat{y}_p^{k_{max}}$  est déterminé. L'idée de l'approche multi-grille consiste à résoudre approximativement le système 2.16 en utilisant une grille dégradée à la résolution  $k - 1$ , sur laquelle le problème est résolu de manière approximative à la résolution  $k - 2$ ... Cette approche mène ainsi naturellement à un *algorithme récursif*.

Sont donc requis *un opérateur de dégradation et un opérateur de raffinement* permettant respectivement de naviguer parmi les niveaux. Tout d'abord les niveaux ne communiquent que par transmission de cartes de résidus. Un opérateur simple et efficace de dégradation consiste à dégrader la carte  $r_p^k$  en  $r_p^{k-1}$  par moyenne arithmétique de 4 pixels adjacents en 1. Réciproquement, le raffinement d'une carte consistera simplement à attribuer la valeur d'un pixel de  $r_p^{k-1}$  à 4 pixels de  $r_p^k$ .

Mais, surtout, l'idée clef de cette approche réside dans *le rééchantillonnage temporel également effectué*. La aussi, nous diminuons d'un facteur 4 la taille du flot temporel considéré lorsque l'on passe du niveau  $k$  au niveau  $k - 1$ , en ne considérant qu'un échantillon sur 4, et réciproquement. Cette réduction est cruciale car le coût des transformations de Fourier diminue d'un facteur  $\sim 4$  à chaque dégradation, permettant d'augmenter, à coût constant, le nombre d'itérations effectuées par niveau. Et ce à tel point que les itérations aux niveaux les plus bas sont d'un coût négligeable. Nous pourrions donc nous permettre, à ces résolutions, le luxe d'itérer jusqu'à la convergence absolue (aux erreurs numériques près) .

Après avoir défini les moyens de naviguer parmi les niveaux, il s'agit de définir comment nous les parcourerons. Alors que l'on peut simplement monter puis descendre plusieurs fois de suite (un cycle dit en V), on pourrait également imaginer des chemins plus complexes (par exemple des cycles en W, ...). La pratique nous montre que les niveaux sont relativement décorrélés, dans le sens où les échelles bien résolues à un niveau donné sont peu affectées par les solutions trouvées aux niveaux supérieurs, un simple cycle en V, schématisé ci-dessous, sera suffisant.

Il s'avère également que le nombre d'itérations par niveau peut être réduit à 2 ou 3 itérations, excepté aux deux niveaux les plus bas, pour lesquels on considérera 200 ou 300 itérations. Pour finir d'optimiser ces cycles, on remarquera que l'on gagne toujours à considérer comme niveau minimal un niveau aussi dégradé que possible, couramment  $k = 2$  ou 3. Ceci est illustré ci-dessous, mais mieux encore, sera appliqué avec succès dans la section suivante.

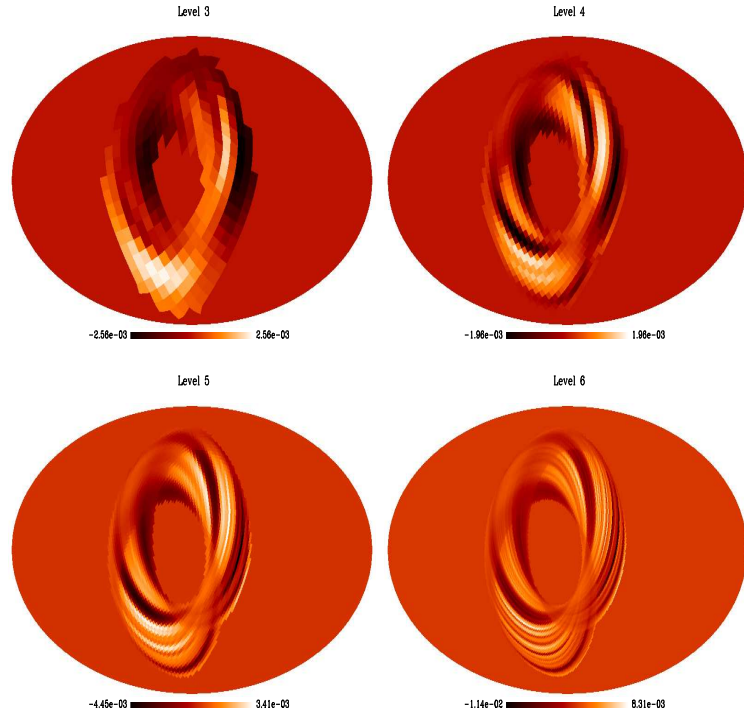
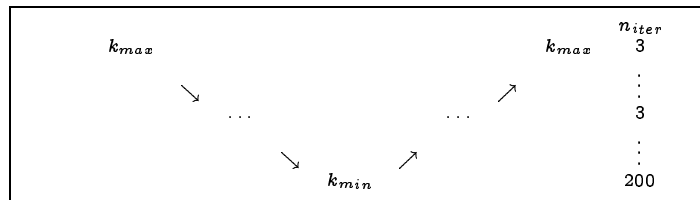


FIG. 2.2

Evaluation de cartes de bruits multi-grille : Sur ces cartes, nous illustrons, dans le cas de simulations ARCHEOPS Kiruna, comment une même carte de bruit est reconstruite à différents niveaux, correspondant précisément à  $N_{side} = 8, 16, 32, 64$ .

---



Pour illustrer ce travail, nous reproduisons dans la figure 2.2 certaines cartes de bruit à différentes résolutions. Elles sont issues de simulations que nous allons maintenant décrire.

## 2.4 Applications sur des simulations

Nous démontrerons maintenant les capacités d'un tel algorithme en utilisant des simulations des expériences ARCHEOPS et TopHat, toutes deux ayant volé en janvier 2001, et dont les données sont donc en cours d'analyse.

### Brève description des simulations

Ces deux expériences sont très similaires au regard de leurs stratégies d'observation. Suspendu à un ballon, leur télescope explore le ciel en effectuant des cercles à vitesse de rotation constante. La rotation de la Terre aidant, le ciel est couvert par des cercles dérivant lentement. Néanmoins, de par leur point de lancement différents, respectivement Kiruna (Suède) et Mc Murdo (Antartique), et différentes inclinaisons de l'axe de leur télescope par rapport à la verticale (respectivement 41 deg. et 12 deg.), leur couverture du ciel est très distincte, ce qui permet d'illustrer la généralité de l'algorithme.

La technologie des bolomètres étant distincte, les performances des expériences sont inégales. Les paramètres réalistes utilisés pour les simulations sont résumés dans le tableau 1.1 .

Ce flot temporel simulé contient un signal provenant des fluctuations de température de type CMB (dipole exclu) et d'origine galactique, auquel a été ajouté un bruit à une amplitude réaliste dont le spectre est donné par  $\tilde{N}(f) = 1 + (f_0/f)^\alpha$ .

Concernant les paramètres propres à l'algorithme lui-même, nous avons considéré cinq niveaux différents. Le niveau maximum étant défini par  $N_{side} = 256$  (pixel  $\sim 13.7'$ ), le niveau minimum par  $N_{side} = 8$  (pixel  $\sim 7.3\text{deg}$ ), on a itéré 3 fois à chaque niveau, excepté au niveau minimal où l'on a itéré 200 fois.

	ARCHEOPS	TopHat
Fréquence d'échantillonnage (Hz)	171	64
Fréquence d'observation (simulée) (GHz)	143 (143)	156 (143)
$\alpha$	1.68	1.0
$f_0$ (Hz)	0.24	1.0
Durée de vol (simulée)	24 hr (24 hr)	10 jours (24 hr)
Bruit (pixel)	30 $\mu$ K (10')	8 $\mu$ K (20')

**Table 1.1** Paramètres utilisés pour les simulations.

### Résultats

L'algorithme est aussi efficace dans les deux situations. Dans le cas d'ARCHEOPS, 2.25 hrs sont nécessaires en utilisant 1 processeur MIPS R12000 (300MHz) d'une SGI ORIGIN 2000 alors que 1.5 heures sont nécessaires pour une journée de données TopHat.

Les figures 2.3 et 2.4 contiennent, de haut en bas et de gauche à droite, respectivement pour ARCHEOPS et TopHat, une carte des données initiales co-additionnées, une carte du signal initial, une carte de bruit puis de signal reconstruite, une carte du nombre de coups par pixels à la résolution la plus fine, et une carte des erreurs. De toute évidence, le destriage est excellent et les deux cartes de signaux reconstruites ne contiennent pas de bruit corrélé apparent. Naturellement, les zones de plus forte redondance correspondent aux zones de moindre bruit.

## Validation

Afin de quantifier quelque peu ces résultats encourageants, nous présentons une série de tests effectués. Tout d'abord, dès que l'algorithme itératif est convergé, le résultat obtenu est identique, aux erreurs numériques près, à celui qui serait obtenu par une inversion impliquant une manipulation de la matrice complète. Ceci a été vérifié en utilisant le code MADCAP [27]. Notons que, dans cette simulation, le critère de convergence a été poussé jusqu'à atteindre la précision machine.

Par ailleurs, il est important de vérifier que le bruit (temporel) évalué après convergence soit Gaussien et possède bien un spectre analogue à celui initialement introduit. Cela est confirmé par les figures 2.6 et 2.5. Nous rappelons à ce niveau la parfaite connaissance *a priori* effectué sur le bruit, *a priori* qui sera levé dans la section 2.5. Nous avons tracé également la densité de probabilité (PDF) de la carte des erreurs. Dans le cas de TopHat, elle présente un léger excès dans les queues dû aux stries résiduelles. Ceci n'illustre en rien une faiblesse de l'algorithme mais rappelle plutôt qu'une carte optimale avec une couverture très inhomogène peut-être striée : certains modes sont très peu contraints par l'absence de redondances.

Notons également qu'aucune corrélation n'a pu être trouvée entre cartes de signal et de bruit, ce qui est essentiel mais non surprenant étant donnée la césure effectuée entre bruit et signal par le premier changement de variable.

## Une accélération substantielle

Enfin, notre motivation première pour l'invention de cet algorithme était le désir de pallier à la lenteur d'un algorithme de type Jacobi. Pour démontrer ce succès, nous avons tracé sur la figure 2.7 l'évolution de la norme-2 des résidus en fonction du nombre d'itérations au niveau maximum pour une méthode de Jacobi (ligne pointillée) et pour son implémentation multi-grille (ligne continue), ceci dans le cas d'une simulation ARCHEOPS. Comme nous le voyons, l'accélération apportée est spectaculaire, supérieure à un facteur 10. Les décrochements visibles correspondent à l'itération successive au travail multi-grille. Les plateaux correspondent aux quelques itérations de type Jacobi nécessaires avant d'entreprendre ce travail, et ont donc une pente identique à un simple algorithme Jacobi. Notons également que la rapidité de convergence permet d'atteindre la précision machine (simple précision), visible pour  $\|r_p^{k_{max}}\|_{ini}/\|r_p^{k_{max}}\| \sim 10^{-6}$ .

Une telle convergence est inutile en pratique, puisque il suffit que la norme des résidus soient moindre que le bruit par pixels, bien supérieur à  $10^{-8}$ .

## 2.5 Des estimations du bruit

### Fondements

Dans la section précédente, nous avons vu avec quelle efficacité notre algorithme permet de résoudre ce problème d'inversion dans l'hypothèse d'un *a priori* de bruit parfait. Il convient de le généraliser à une situation où aucun *a priori* n'est fait sur le bruit, situation à laquelle la pratique nous confronte. Ce type d'approche a été déjà développé par [28] et indépendamment par [22]. En cela, notre démarche sera très proche de la leur.

Ne supposant également aucun *a priori* sur la carte elle-même - nous nous intéressons toujours à une solution de type *COBE* et considérons  $\mathcal{P}(x_p^\nu | \Theta, \mathcal{C}_t, I) = \text{cste}$  - il s'agit de maximiser la fonction  $\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I)$  simultanément par rapport à  $x_p$  et  $N_{tt'}$ . Faisant toujours l'hypothèse d'un bruit *Gaussien et stationnaire*, le bruit est complètement caractérisé par son spectre de puissance (temporel),  $\tilde{N}_f$ , que nous chercherons donc à évaluer.

Nous n'emploierons pas l'*a priori* de Jefferys conseillé pour les lois de puissance [29] car une forme typique de spectre de bruit est plutôt du type  $1 + (f_0/f)^a$ . Nous diviserons le spectre de puissance en  $n_\alpha$  bins de largeur (variable)  $\Delta_\alpha$  où  $\tilde{N}_f$  sera considéré constant et égal à  $\tilde{N}_\alpha$ .

En espace de Fourier, la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$  peut alors s'écrire [28],

$$\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I) \propto \prod_{\alpha} \frac{1}{\tilde{N}_\alpha^{n_\alpha/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{f \in \alpha} \frac{1}{\tilde{N}_\alpha} |\tilde{d}_f - \tilde{A}x_f|^2\right) \quad (2.17\text{-a})$$

Calculant les dérivées de cette fonction par rapport à  $x_p$  et  $\tilde{N}_\alpha$ , on obtient

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I)}{\partial x_p} = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{\tilde{N}_\alpha} \sum_{f \in \alpha} |\tilde{d}_f - \tilde{A}x_f| \tilde{A}_{pf} \right) \quad (2.18\text{-a})$$

$$= (d - Ax)^T N^{-1} A \quad (2.18\text{-b})$$

avec les notations matricielles, et

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I)}{\partial \tilde{N}_\alpha} = -\frac{1}{2\tilde{N}_\alpha} \left( n_\alpha - \sum_{f \in \alpha} \frac{1}{\tilde{N}_\alpha} |\tilde{d}_f - \tilde{A}x_f|^2 \right) \quad (2.19\text{-a})$$

Cherchant un extrema de  $\ln \mathcal{L}$ , nous trouvons que les solutions  $x_p$  et  $\tilde{N}_\alpha$  doivent satisfaire aux deux équations suivantes :

$$x_p = (A^T N^{-1} A)^{-1} A^T N^{-1} d \quad \text{et} \quad (2.20\text{-a})$$

$$\tilde{N}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{f \in \alpha} |\tilde{d}_f - \tilde{A}x_f|^2. \quad (2.20\text{-b})$$



Trouver une solution explicite aux deux équations précédentes est difficile. Par contre, remarquer que la première de ces équations correspond à un estimateur de carte classique, *i.e.* sans estimations de bruit, suggère fortement une solution itérative, solution que nous adopterons. Celle-ci consiste, pour une évaluation de bruit donné, à calculer une carte optimale en utilisant l'algorithme avec *a priori* de bruit précédemment illustré avant d'effectuer une nouvelle estimation de bruit, et ce plusieurs fois de suites.

---

$y^{(0)} = 0 \quad \& \quad N^{(0)}$	choix initiaux
$y^{(i)} = (PN^{(i-1)-1}A)^{-1}PN^{(i-1)}(d - APd)$	fabricateur de carte
$n^{(i)} = d - A(y^{(i)} + Pd)$	evaluation du bruit
$N^{(i)} = \langle n^{(i)} n^{(i)T} \rangle$	

---

La convergence d'un tel algorithme ne peut que difficilement être démontrée analytiquement, aussi elle nécessitera de l'être par expérimentation numérique.

Toutefois, certains calculs analytiques peuvent encore nous instruire. Approximant (grossièrement) la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$  par une Gaussienne, et en supposant un temps d'observation constant par pixel, on peut calculer sa courbure aux extremas et donc évaluer les barres d'erreurs associées à cet estimateur de bruit [28], d'où on peut déduire une estimation de la matrice de covariance du bruit *sur la carte* :

$$\langle (N_{pp'}^{est})^{-1} \rangle = (1 - \frac{2\mathcal{N}_p}{n_\alpha}) \langle (N_{pp'})^{-1} \rangle. \quad (2.21)$$

Cette formule simple montre que si l'on considère une fréquence par bande ( $n_\alpha = 1$ ), alors la matrice inverse est négative, signe que le problème est mal-conditionné. Par opposition, le biais devient négligeable si ce nombre augmente. Il s'agit donc de considérer en pratique une situation intermédiaire. Notons tout de même que cette formule (approximée) semble indiquer que l'estimateur de la matrice de covariance du bruit soit légèrement *biaisé*. Une discussion alternative et élégante peut être trouvée dans [26].

## Applications

Pour démontrer la convergence d'un tel estimateur du bruit nous l'avons testé sur les simulations de l'expérience ARCHEOPS précédemment décrites mais en ne considérant cette fois *aucun a priori* sur le bruit.

Les premiers choix sont constitués par  $y^0 = 0$  et  $n^{(0)} = d - APd$ , comme explicité dans la section précédente. A ce niveau d'itération et aux suivants, nous déduisons de l'estimation du bruit temporel une évaluation du spectre de puissance que nous divisons en intervalles qui sont, soit logarithmiquement espacés ( $\Delta \ln f = cste$ ) dans la partie en  $1/f$ , soit linéairement espacés dans la partie à haute fréquence ( $\Delta f = cste$ ).

Pour nous,  $\Delta \ln f = 0.15$  et  $\Delta f = 0.05$  Hz seront satisfaisant. De cette manière, la convergence vers le bruit est à la fois rapide puisque trois évaluations

du bruit sont suffisantes, et robuste. Ceci est illustré dans la figure 2.8. Afin de s'approcher de conditions expérimentales, nous avons introduit dans le spectre initial une bosse à une fréquence plus grande que  $f_0$ . Nous constatons que le spectre et toutes ces caractéristiques sont restitués sans aucun biais visible, hormis dans le voisinage de la fréquence de rotation à 0.05 Hz. Ceci n'est guère surprenant puisqu'à cette fréquence, il est particulièrement difficile de séparer signal et bruit. Ceci nous a poussé à augmenter l'intervalle  $\Delta \ln f$  à 1 Hz pour les premières évaluations, nivellant ainsi ce spectre. Seulement dans la dernière évaluation du bruit nous diminuerons  $\Delta \ln f$  à 0.15 Hz.

Cette procédure est donc robuste. Pour l'optimiser, il faut évaluer le nombre d'itérations du fabricant de cartes nécessaires entre chaque évaluation du bruit. Comme illustré dans la figure 2.9 où nous avons considéré successivement 4, 8 ou 10 itérations, et 10 itérations semblent être suffisantes.

### Estimations de $N_{pp'}$

Il est important de discuter maintenant la question de l'évaluation des propriétés du bruit sur la carte et en particulier de la génération de la matrice de covariance du bruit  $N_{pp'}$ . En effet, comme mentionné dans l'introduction de cette partie, tout algorithme de fabrication de carte *doit* permettre une évaluation du bruit sur la carte, ou plutôt de ces propriétés statistiques, indispensable en aval du processus d'analyse, comme par exemple pour l'évaluation des  $\mathcal{C}_l$  (voir chapitre suivant). Ceci est évident dès lors que l'on se rappelle que le signal du CMB est principalement recherché sous la forme d'un excès de variance par rapport au bruit. Les approches de "force brute" permettent ceci en générant directement cette matrice au moyen de certaines hypothèses (fondées, voir Eq.2.11), comme discuté dans [18] et [26]. Nous reviendrons plus en détail sur ces méthodes dans le chapitre 3. Ces approches sont communément nourries d'une évaluation de la fonction de corrélation du bruit dans le domaine temporel, fonction qui peut s'obtenir par transformation de Fourier du spectre évalué précédemment. Une telle approche a été appliquée pour les premières analyses BOOMERanG [30] et MAXIMA [31]. Ces approches nécessitent l'emploi de super-calculateurs et sont donc très lourdes. Même si une anticipation de la puissance de calcul suivant la loi de Moore rend ce type d'approche "quasi-raisonnable" pour PLANCK, *i.e.* faisable mais non souhaitable, pourvu que de nouveaux algorithmes tiennent leurs promesses [19], d'autres approches moins coûteuses ont vu le jour [21, 32].

Elles sont de type Monte-Carlo et ont depuis la publication de nos travaux - et non suite à - été appliquées avec succès à la seconde analyse des données BOOMERanG [33]. L'idée, simple, consiste à estimer  $N_{pp'} = \langle n_p n_{p'} \rangle$  à l'aide d'un nombre fini  $\mathcal{N}_r$  de réalisations.

Notre approche rapide se prête particulièrement bien à ce type de réalisations et le schéma suivant survient naturellement :

- Evaluation du spectre de bruit,  $\tilde{N}_f$ , au moyen de l'algorithme précédemment décrit.
- À partir de ce spectre, génération de  $\mathcal{N}_r$  réalisations du bruit temporel  $n_t$ .
- En utilisant ce spectre de bruit comme *a priori*, on réalise  $\mathcal{N}_r$  réalisations de cartes de bruit.
- À partir de ces  $\mathcal{N}_r$  cartes on déduit les caractéristiques souhaitées du bruit dans le domaine spatial.

Ce schéma se fonde tout d'abord sur le fait que l'opérateur de fabrication de cartes soit linéaire ( $O(s + n) = Os + On$ ). Il offre des avantages de stockage évident car tant que  $\mathcal{N}_r \ll \mathcal{N}_p$ , stocker ces  $\mathcal{N}_r$  cartes est plus économique que de stocker  $N_{pp'}$ , avantage non négligeable si l'on remarque ce stockage nécessiterait, pour une carte de PLANCK, 0.45 Tb. Toutefois il est bon de rappeler que la précision de cette évaluation (sur lesquelles les requêtes sont encore indéterminées) croît comme  $1/\sqrt{\mathcal{N}_r}$ , aussi une précision de 1% nécessite 10 000 réalisations, nombre conséquent même si est mis à profit le parallélisme évident de ces calculs.

Pour illustrer les promesses de cette approche et motiver de plus amples études encore à conduire, nous avons considéré une évaluation des  $\mathcal{C}_\ell$  du bruit, *i.e.* uniquement de la diagonale de la transformée en harmonique sphérique de  $N_{pp'}$ , et ce avec  $\mathcal{N}_r = 10$  seulement. Ceci est fait par simple moyenne des  $\mathcal{C}_\ell$  des cartes de bruit. Les résultats encourageant de cette approche sont illustrés sur la figure 2.10. Nous y traçons le  $\mathcal{C}_\ell$  estimé du bruit, du signal initial ainsi que la différence entre les  $\mathcal{C}_\ell$  de la carte bruitée optimale et celles de la carte du bruit.

La capacité de cette méthode implémentée grossièrement à corriger du bruit est très encourageante. Le  $\mathcal{C}_\ell$  du signal évalué se trouve inclus dans les barres d'erreurs tracées. Ces barres d'erreurs ont été évaluées analytiquement, tenant compte de la dispersion due au bruit mais aussi à la variance cosmique introduite dans l'introduction générale [34]. Notons que la mesure des  $\mathcal{C}_\ell$  est effectuée grossièrement par le programme anafast de HEALPix, sans déconvolution de la fenêtre (voir chapitre suivant). Par ailleurs, les  $\mathcal{C}_\ell$  du bruit ne caractérisent que grossièrement les propriétés de celui-ci, non stationnaire spatialement. Le succès de cette approche en est d'autant plus encourageant.

## 2.6 Discussions

Finalement, avant de discuter l'applicabilité d'une telle méthode en pratique, il est utile d'estimer le temps de calcul requis pour une expérience donnée, de

la comparer avec d'autres méthodes plus classiques, et de discuter de manière critique ses hypothèses.

### Loi d'échelle

L'étape limitante de cet algorithme est la transformée de Fourier, celle-ci impose donc l'évolution du temps de calcul nécessaire en fonction du nombre d'échantillons, évolution en  $\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t$ .

À partir des applications précédentes on peut donc proposer la loi suivante, pour un unique processeur :

$$t = 2.25 \text{ hrs} \frac{\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t}{12 \times 10^6 \ln(12 \times 10^6)} \frac{\mathcal{N}_{cycle}}{6} \quad (2.22\text{-a})$$

$$= 2.15 \times 10^{-9} \text{ hrs } \mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t \mathcal{N}_{cycle}. \quad (2.22\text{-b})$$

où  $\mathcal{N}_{cycle}$  désigne un cycle multi-grille complet et inclut donc plusieurs itérations au niveau  $k_{max}$ . La dépendance vis à vis de  $\mathcal{N}_p$  est présente mais très subdominante puisqu'intervenant dans les opérations de projection et d'observation. En termes de mémoire nécessaire, les besoins de cet algorithme sont simplement proportionnels à  $\mathcal{N}_t$  avec un facteur proche de l'unité.

### Comparaison avec d'autres méthodes

Notre algorithme ainsi bien établi, il est intéressant de le comparer à d'autres approches itératives proposées par ailleurs.

Alors que nous avons souhaité améliorer l'approche de [22] en utilisant comme méthode de relaxation celle de Jacobi, d'autres travaux [5, 20, 35] ont implémenté un algorithme de type gradient conjugué<sup>6</sup>. Dans [35] il est même présenté une implémentation parallèle de ce code, ayant permis de traiter une simulation de flot temporel de l'instrument PLANCK LFI. Cet algorithme standard est donc efficace.

Aussi nous avons implémenté cet algorithme itératif et l'avons comparé à notre approche multi-grille dans le cadre de simulations ARCHEOPS. Dans la figure 2.11, nous traçons l'évolution de la norme-2 des résidus en fonction du nombre d'itérations (seulement au niveau maximum pour la multi-grille) pour la méthode de Jacobi (ligne bleue, pointillée long), du gradient conjugué (ligne verte pointillée) et du Jacobi multi-grille (ligne rouge continue). Les résultats de cette figure sont représentatifs des différentes simulations que nous avons effectuées.

De fait, alors que la méthode de Jacobi est extrêmement lente, les deux autres méthodes offrent des résultats comparables. Ce résultat finalement positif pour la méthode multi-grille - puisque la convergence du gradient conjugué est mathématiquement démontrée comme optimale [24, 19] - doit être nuancé. En effet le travail multi-grille induit un coût par itérations supérieur à celui

---

<sup>6</sup>Il s'agit de la méthode non-stationnaire (l'itérateur  $R$  est modifié à chaque itération) la plus simple [24].

du gradient conjugué, si bien que, même si le comportement en  $\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t$  est identique, le facteur sera légèrement plus important dans le cas du multi-grille. Pour ce dernier, le nombre d'opération requis est en fait plutôt proportionnel à  $\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t + \mathcal{N}_t/4 \ln \mathcal{N}_t/4 + \mathcal{N}_t/16 \ln \mathcal{N}_t/16 \dots$

Ainsi, alors que la méthode de Jacobi et ses améliorations ont motivé nos travaux, des méthodes plus classiques et à l'implémentation plus aisée se révèlent plus efficace.

### Espoirs d'une méthode par filtrage de Wiener dans le domaine temporel

Il est une méthode sur laquelle nous avons fondé quelques espoirs jusqu'à présent déçus [36]. Celle-ci apparaît dès lors l'équation 2.8 écrite. En effet, si l'on fait l'hypothèse de la stationnarité du signal et du bruit, cette équation peut s'écrire dans l'espace de Fourier comme une simple pondération en  $Spectre(Signal)/(Spectre(Signal) + Spectre(Bruit))$ , immédiatement implémentable dès lors que l'on se donne comme *a priori* le spectre du bruit. Testée sur des simulations type ARCHEOPS contenant uniquement du signal de type CMB (sans dipole) et un bruit à un niveau nominal, cette méthode permet un filtrage de Wiener parfait en quelques minutes.

Toutefois, en pratique, cette méthode souffre de plusieurs défauts. Tout d'abord, pour une stratégie de balayage du ciel de type ARCHEOPS, certains signaux, tels le signal galactique ou le dipole cosmologique, sont, par nature, non-stationnaires ce qui rend l'application de cette méthode moins triviale. Par ailleurs, un pointage non idéalement régulier peut supprimer les propriétés de stationnarité d'un signal qui devrait en principe l'être dans le domaine temporel. Aussi, pour ces simples raisons, cette méthode n'a pas encore trouvé d'applications pratiques. Notons qu'elle attire notre attention sur la fragilité de l'hypothèse de stationnarité, cruciale pour l'approche harmonique proposée pour l'analyse des données PLANCK [4].

### Hypothèses critiques et directions futures

Dans ce chapitre, nous avons présenté les performances d'un algorithme original de fabrication de cartes, développé initialement pour les expériences ARCHEOPS et PLANCK. Cet algorithme repose sur plusieurs hypothèses, réalistes, mais nécessitant plus ou moins d'être dépassés : la Gaussianité du bruit, sa stationnarité, et la symétrie du lobe instrumental.

- La première est à la fois critique et réaliste. En effet, d'une part, si le bruit devait être non-Gaussien alors la méthode entière perd ses fondements car la fonction de vraisemblance écrite en 2.1 est inexacte. En pratique, cette hypothèse est souvent mise en danger par la présence d'erreurs systématiques plus ou moins bien connues et modélisées. La plupart des expériences actuelles ont été confrontées à ce problème, de manière plus ou moins critique. Parmi elles, COBE, BOOMERanG, ARCHEOPS. . . L'approche correcte, si l'on ne peut éliminer ces erreurs par

simple filtrage, consiste naturellement à modifier le modèle du signal en y incluant le bruit systématique, par exemple au moyen d'une base de fonctions appropriée <sup>7</sup>. L'existence de tels signaux, difficiles à enlever, peut mettre en danger l'usage de l'intégralité de certains jeux de données.

- La seconde hypothèse, *la stationnarité du bruit* n'est pas indépendante de la première. Elle permet, comme nous l'avons vu, une écriture plus simple de la matrice  $N_{tt'}$ , que ce soit dans l'espace réel ou dans l'espace de Fourier. Si elle n'était pas avérée, alors le flot temporel devrait être sectionné en intervalles ou elle l'est. Si elle était violée sur des intervalles de temps courts, alors elle pourrait y être restituée par la substitution aux données d'une réalisation contrainte de bruit [22, 26].
- Peut-être la dernière hypothèse, concernant *la symétrie du lobe instrumental*, est-elle, non seulement critique, mais, surtout, la plus difficile à lever. Alors que la sensibilité des expériences actuelles autorise cette hypothèse [37], la sensibilité désirée pour les expériences futures ne la permettra pas, comme nous l'illustrerons dans le chapitre 4. Même si des expériences comme MAXIMA [37] ou ARCHEOPS [38] ont mesuré des lobes principaux elliptiques à hauteur de 20 %, chiffre attendu également dans le cas de PLANCK [39], dans les premiers cas, cet effet est négligeable par rapport au bruit, ce qui ne sera plus vrai pour le dernier cas. À l'heure actuelle, aucune approche ne permet de traiter ce problème de manière simple, et il fait donc l'objet de plusieurs de nos travaux en cours. Notons que, dans le cadre d'une approche harmonique (encore à valider) [4], ce problème est traité conjointement à l'effet du lobe lointain [36]. Rappelons également que les effets des lobes lointains ont été négligés jusqu'à maintenant, même si l'on sait leur contribution non négligeable [40, 41].

Nos hypothèses sont donc satisfaisantes dans l'utilisation actuelle de cet algorithme, à savoir au sein des collaborations ARCHEOPS et TopHat, où il est utilisé en conjonction avec d'autres méthodes plus ou moins alternatives. Elles répondent également au besoin de l'expérience PLANCK, aussi ce code fait déjà partie du prototype de "pipeline" de traitement des données PLANCK HFI (L2, GPH424 - Map making). Il appelle néanmoins encore des extensions, sur les effets de lobe en particulier, sur le traitement de plusieurs canaux simultanément ce qui mène directement à la fabrication de cartes de la polarisation optimales (cartes des paramètres de Stokes Q et U par exemple).

Parmi d'autres directions de recherches, notons que notre signal a été décrit dans la base la plus naturelle : un ciel pixelisé. D'autres bases de fonctions seraient envisageables, parmi lesquelles les harmoniques sphériques, ce qui mène à l'approche harmonique [4], ou bien à une base d'ondelettes suggérée par notre approche multi-grille. Notons enfin qu'un tel algorithme ne saurait être sans conséquences pour une approche itérative du problème, voisin, de la séparation des composantes [42].

---

<sup>7</sup>Les coefficients de cette décomposition sont ajoutés comme des métapixels à la carte  $x_p$  et déterminés simultanément.

Alors que ce mémoire approchait sa complétion, une méthode non-itérative d'estimation du bruit a été proposée [43]. Même si très prometteuse, nous la discuterons pas ici par simple manque de temps.

Ce code en FORTRAN 90 nommé ***MapCUMBA*** par un anonyme inspiré, est publique et accessible sur <http://ulysse.iap.fr/download/mapcumba/> .

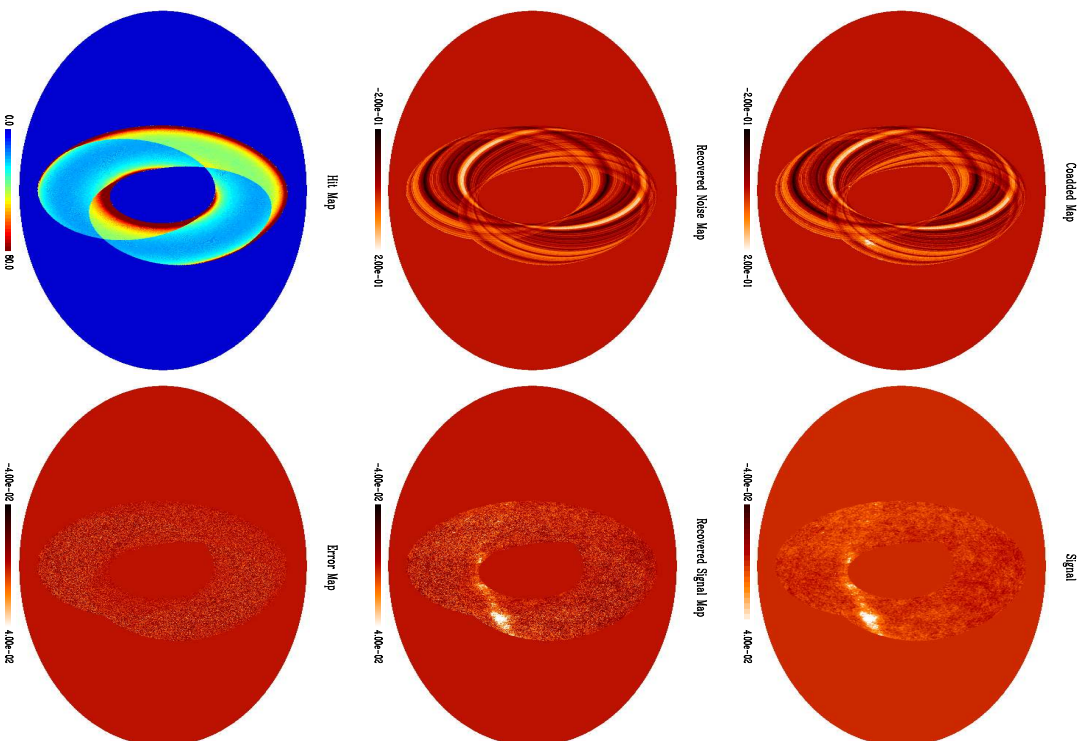


FIG. 2.3  
Simulation d'un vol Kiruna : De haut en bas et de gauche à droite, une carte obtenue par co-addition, une carte du signal initial Galaxie + CMB, les cartes de bruit et de signal reconstruites, la carte de coups et la carte des erreurs. L'absence de symétrie de la carte est due au fait que nous ayons considéré légèrement moins de 24hr. Projection Mollweide avec des pixels de  $13.7'$  (HEALPix  $N_{side} = 256$ ). Unité arbitraire.

---



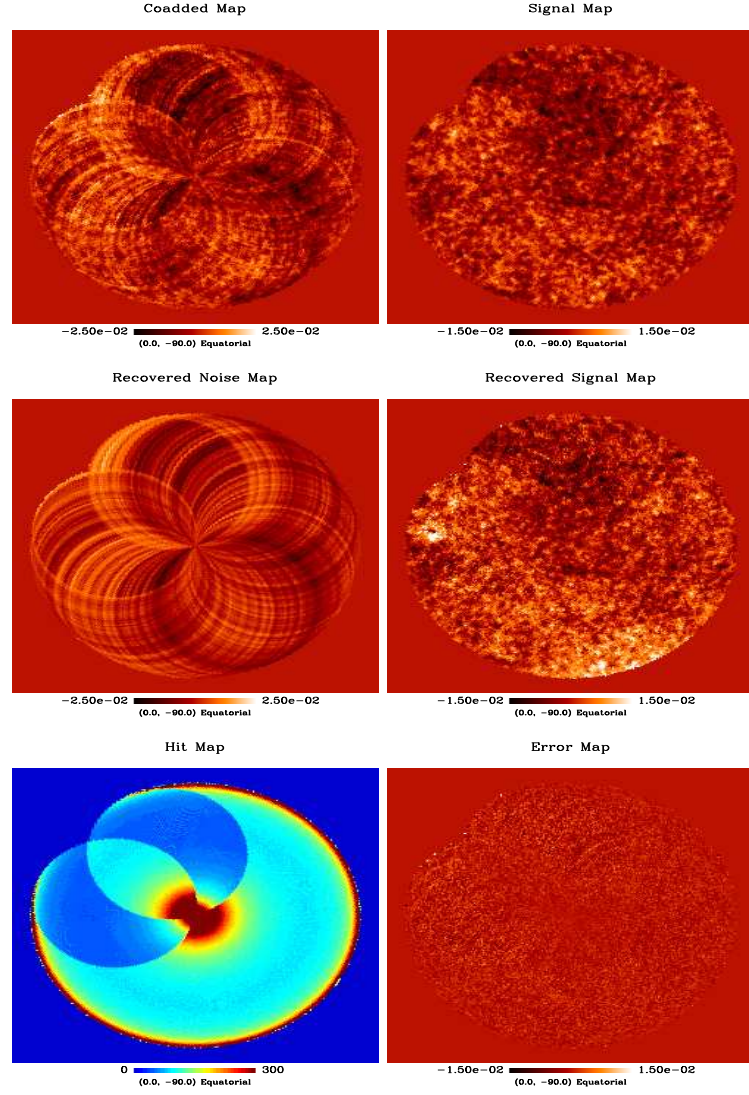


FIG. 2.4

Simulation d'une journée de vol TopHat : De haut en bas, et de gauche à droite, la carte obtenue par co-addition, la carte du signal injecté CMB + Galaxie, la carte de bruit reconstruite, et la carte de signal reconstruite, la carte du nombre de coups, et la carte des erreurs. La couverture n'est pas complètement symétrique du fait que l'on ait considéré uniquement 18.2hr de vol. Projection gnomonique avec des pixels de  $13.7'$  (HEALPix  $N_{side} = 256$ ). Notons que le léger striage visible est corrélié à la rotation incomplète choisie. Etant donné cette couverture, la carte optimale est striée. Unité arbitraire.

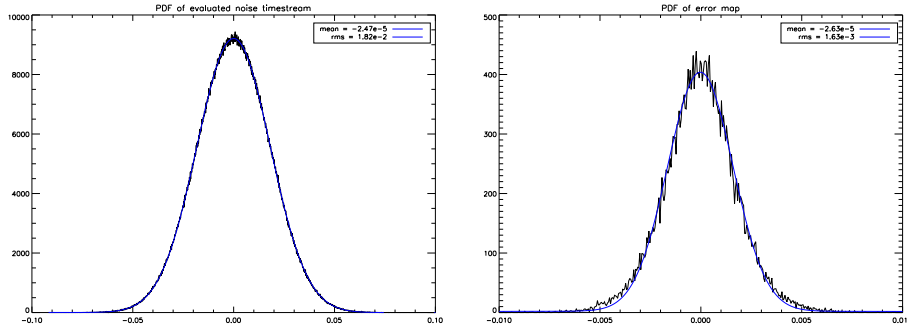


FIG. 2.5

Dans le cas de TopHat, nous traçons à gauche la PDF du bruit temporel évalué ainsi que la PDF de la carte des erreurs à droite, *i.e.* du bruit résultant sur la carte. Une Gaussienne a été ajustée à chacune d'elles. Leurs paramètres (moyenne et déviation standard) sont notés en haut à droite. Aucun départ significatif à la Gaussiannité n'est visible. Unité arbitraire.

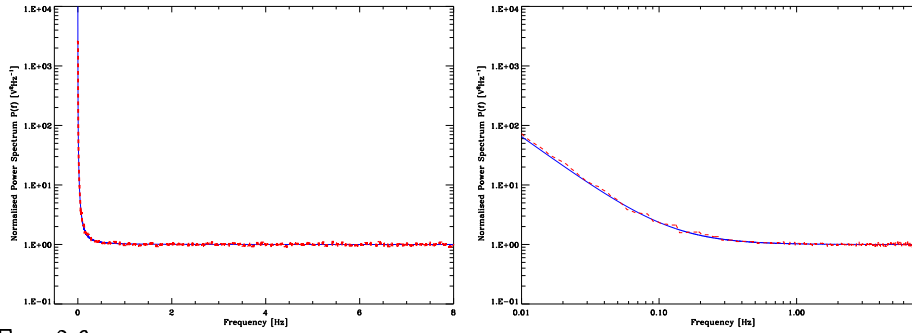


FIG. 2.6

Évaluation du spectre de bruit dans le cas d'Archeops (Haut : axe des x linéaire, bas : axe des x logarithmiques). La ligne pointillée rouge montre le spectre initial (analytique) alors que la ligne continue bleue montre celui évalué après 6 itérations. Le spectre évalué a été binné comme décrit dans la section 2.5 et les deux sont normalisées à 1 dans leur partie haute fréquence. L'accord est excellent et aucun biais n'est visible. Rappelons qu'ici un *a priori* parfait est effectué sur le bruit.

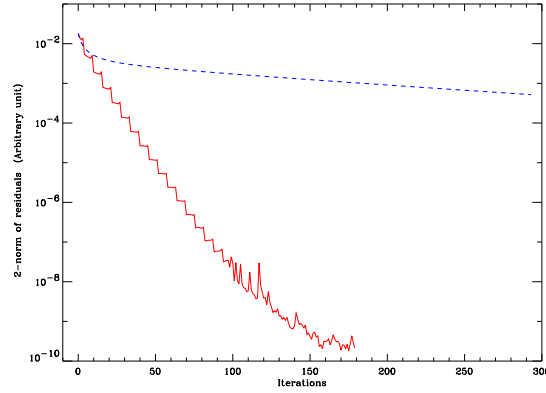


FIG. 2.7

Évolution de la norme-2 des résidus au niveau max avec le nombre d'itérations. Alors que la ligne bleue pointillée correspond à une méthode de Jacobi standard, la ligne solide rouge correspond à la méthode de Jacobi multi-grille. Un cycle multi-grille comprend 3 itérations au niveau maximum, avant de descendre puis monter parmi les autres niveaux. Les décrochements correspondent au moment où l'algorithme atteint le niveau supérieur, bénéficiant alors pleinement du travail à résolution moindre. Les pics visibles après l'itération 100 sont dus au fait que la précision (4-bytes) a été atteinte, ce qui serait quasi-impossible avec la méthode de Jacobi ordinaire.

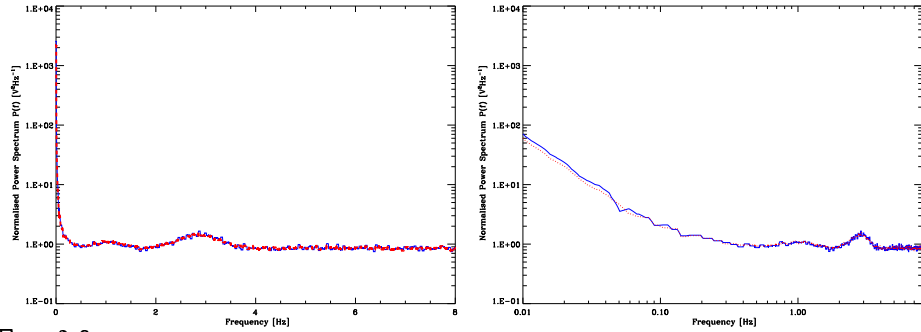


FIG. 2.8

Évaluation du spectre de puissance (gauche : axe des x linéaires, droite : axe des x logarithmique) : la ligne pointillée rouge montre le spectre de bruit initial obtenu à partir du spectre de bruit analytique divisé de manière identique au spectre évalué après 5 itérations (ligne bleue continue). Les deux sont normalisés de telle sorte que leur partie à haute fréquence soit égale à un. L'accord est, de fait, très bon. Nous rappelons qu'aucun *a priori* n'a été fait pour cette évaluation.

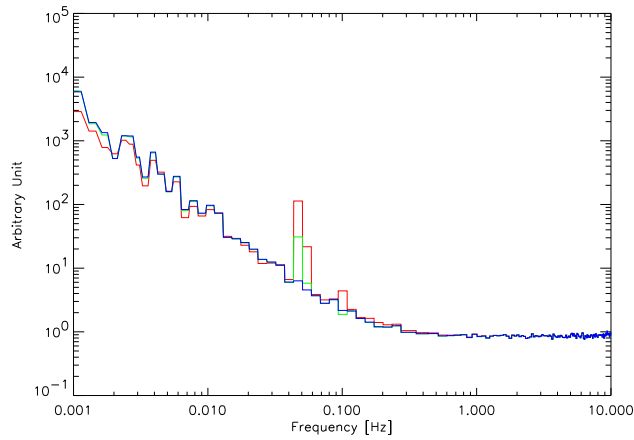


FIG. 2.9

Évaluation du spectre de puissance : Le nombre d'itérations entre chaque évaluation du bruit est respectivement de 4 (ligne rouge), 8 (ligne verte) et 10 (ligne bleue). Le pic à la fréquence de rotation est un bon critère de convergence car la séparation à cette fréquence est particulièrement sensible. Dix itérations semble donc être le nombre d'itérations optimal. Remarquons que, du fait de l'approche multi-grille, la convergence des basses fréquences est toujours assurée.

---

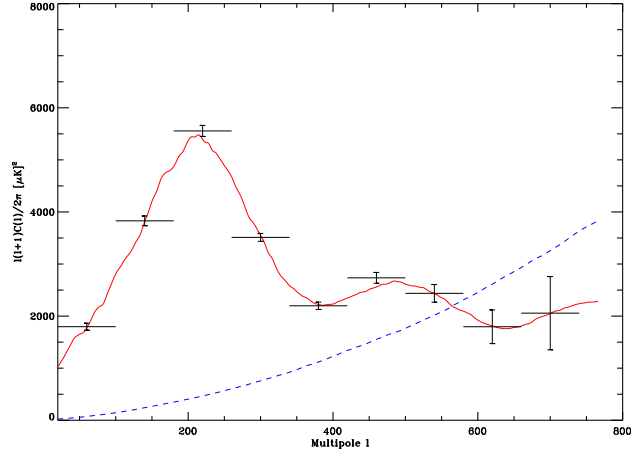


FIG. 2.10

Évaluation approximée de la puissance par bande dans le cas de l'expérience TopHat (*une journée de vol*). La puissance par bande évaluée (ligne noire) qui doit être comparée au spectre initial (ligne rouge). Les deux ont été mesurés en utilisant le programme anafast. Ces évaluations de puissance par bande ( $\Delta l = 80$ ) ont été effectuées en utilisant une évaluation des  $\mathcal{C}_l$  du bruit par Monte-Carlo (ligne bleue pointillée). Ceci ne constitue en rien une mesure appropriée mais plutôt un pas encourageant vers une évaluation par Monte-Carlo plus propre (réalisée depuis [32]).

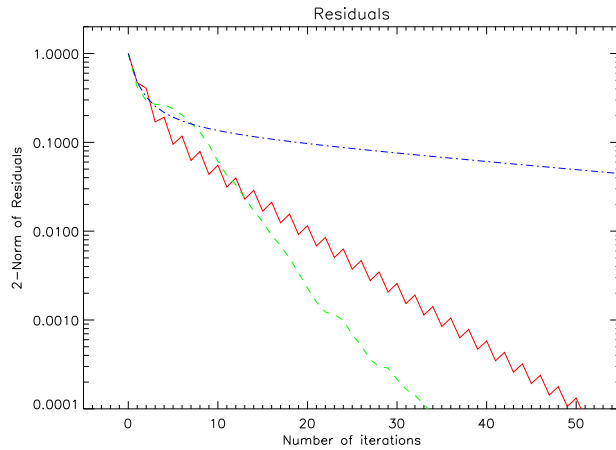


FIG. 2.11

Comparaison des vitesses de convergence de trois méthodes itératives. La norme-2 des résidus est tracée en fonction du nombre d'itérations. La ligne bleue pointillée (long) dénote la méthode de Jacobi, la ligne rouge continue la méthode Jacobi multi-grille et la ligne verte pointillée une méthode de gradient conjuguée préconditionnée. Ces deux dernières ont un taux de convergence (par itérations) comparable mais une itération du type multi-grille nécessite  $\sim 2$  fois plus d'opérations. Notons que la méthode multi-grille a une convergence monotone ce qui n'est pas le cas pour le gradient conjugué (cette différence persiste sur d'autres exemples).

---

# Bibliographie

- [1] O. Doré, R. Teyssier, F. R. Bouchet, D. Vibert, and S. Prunet. MAP-CUMBA : A fast iterative multi-grid map-making algorithm for CMB experiments. *A&A*, 374 :358–370, July 2001.
- [2] L Knox *et al.* . Comparing Cosmic Microwave Background Datasets. *Phys. Rev. D*, 58 :083004, 1998.
- [3] M. Tegmark. Comparing and Combining Cosmic Microwave Background Data Sets. *ApJ*, 519 :513–517, July 1999.
- [4] F. van Leuwen. An harmonic approach to CMB data analysis (titre incertain). *en préparation*.
- [5] E. L. Wright. . In *IAS CMB Workshop*, 1996.
- [6] M. Tegmark. How to measure CMB power spectra without losing information. *Phys. Rev. D*, 55 :5895–5907, May 1997.
- [7] M. A. Janssen and S. Gulkis. Mapping the sky with the COBE differential microwave radiometers. In *NATO ASIC Proc. 359 : The Infrared and Submillimetre Sky after COBE*, pages 391–408, 1992.
- [8] S. Zaroubi, Y. Hoffman, K. B. Fisher, and O. Lahav. Wiener Reconstruction of the Large-Scale Structure. *ApJ*, 449 :446+, August 1995.
- [9] F. R. Bouchet and R. Gispert. A Brief Overview of the Scientific Capabilities of MAP and Planck. In *Large Scale Structure : Tracks and Traces*, pages 345–352, 1998.
- [10] F. R. Bouchet and R. Gispert. Foregrounds and cmb experiments i. semi-analytical estimates of contamination. *New Astronomy*, 4 :443–479, November 1999.
- [11] M. Tegmark and G. Efstathiou. A method for subtracting foregrounds from multifrequency CMB sky maps. *MNRAS*, 281 :1297–1314, August 1996.
- [12] M. P. Hobson and A. N. Lasenby. The entropic prior for distributions with positive and negative values. *MNRAS*, 298 :905–908, August 1998.
- [13] M. P. Hobson, A. W. Jones, A. N. Lasenby, and F. R. Bouchet. Foreground separation methods for satellite observations of the cosmic microwave background. *MNRAS*, 300 :1–29, October 1998.

- [14] J.R. Bond and R.G. Crittenden. Cmb analysis. In *NATO ASI Structure Formation in the Universe*, eds. R.G. Crittenden and N.G. Turok (Kluwer), 2001.
- [15] J. Borrill. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference "Mining the sky"*, Garching, 2000.
- [16] S. Prunet. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference "Mining the sky"*, Garching, 2000.
- [17] R. Stompor. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference "Mining the sky"*, Garching, 2000.
- [18] J. Borrill. The Challenge of Data Analysis for Future CMB Observations. In *AIP Conf. Proc. 476 : 3K cosmology*, pages 277+, 1999.
- [19] P. Koev and J. Borrill. en préparation. 2001.
- [20] S. P. Oh, D. N. Spergel, and G. Hinshaw. An Efficient Technique to Determine the Power Spectrum from Cosmic Microwave Background Sky Maps. *ApJ*, 510 :551–563, January 1999.
- [21] B. Wandelt and K. Gorski. Fast convolution on the sphere. *Phys. Rev. D*, 62 :123002, 2000.
- [22] S. Prunet, C. Netterfield, E. Hivon, and B. Crill. Iterative map-making for scanning experiments. In *Proceedings of the XXXVth "Rencontres de Moriond, Energy Densities in the Universe"*, Editions Frontieres, 2000.
- [23] B. Rust and W. Burrus. *Modern Analytical and computationnal methods in science and mathematics*. Elsevier, 1972.
- [24] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes, 2nd ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [25] K. Górski, E. Hivon, and B. Wandelt. Analysis issues for large CMB data sets. In *MPA/ESO Garching Conference*, eds A. Banday, Sheth K., L. Da Costa, 1998.
- [26] R. Stompor *et al.* . Making Maps Of The Cosmic Microwave Background : The MAXIMA Example. *soumis à Phys. Rev. D*, 2001.
- [27] J.-C. Hamilton. WORKSHOP interne à la collaboration ARCHEOPS, Grenoble ISN, 19/06/2001.
- [28] P.G. Ferreira and A. H. Jaffe. Simultaneous estimation of noise and signal in cosmic microwave background experiments. *MNRAS*, 312 :89–102, February 2000.
- [29] M. Kendall and M. Stuart. *The advanced theory of statistics*. Charles Griffin & Company limited, London, 1968.
- [30] P. de Bernardis, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, G. De Gasperis, P. C. Farese, P. G. Ferreira, K. Ganga, M. Giacometti, E. Hivon, V. V. Hristov, A. Iacoangeli, A. H. Jaffe, A. E. Lange, L. Martinis, S. Masi, P. V. Mason, P. D. Mauskopf, A. Melchiorri,



- L. Miglio, T. Montroy, C. B. Netterfield, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, S. Prunet, S. Rao, G. Romeo, J. E. Ruhl, F. Scaramuzzi, D. Sforna, and N. Vittorio. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404 :955–959, April 2000.
- [31] S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. de Bernardis, P. G. Ferreira, V. V. Hristov, A. H. Jaffe, A. E. Lange, A. T. Lee, P. D. Mauskopf, C. B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, B. Rabii, P. L. Richards, G. F. Smoot, R. Stompor, C. D. Winant, and J. H. P. Wu. MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of  $10^{-5}$  deg. *ApJ Let.*, 545 :L5–L9, December 2000.
  - [32] E. Hivon *et al.* . MASTER of the CMB Anisotropy Power Spectrum : A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex CMB Data Sets. *soumis à ApJ*, 2001.
  - [33] C. Netterfield *et al.* . A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *soumis à ApJ*, 2001.
  - [34] L. Knox. Determination of inflationary observables by cosmic microwave background anisotropy experiments. *Phys. Rev. D*, 52 :4307–4318, October 1995.
  - [35] P. Natoli, G. de Gasperis, C. Gheller, and N. Vittorio. A Map-Making algorithm for the Planck Surveyor. *A&A*, 372 :346–356, June 2001.
  - [36] O. Doré *et al.* . In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference “Mining the sky”*, Garching, 2000.
  - [37] J. H. P. Wu, A. Balbi, J. Borrill, P. G. Ferreira, S. Hanany, A. H. Jaffe, A. T. Lee, S. Oh, B. Rabii, P. L. Richards, G. F. Smoot, R. Stompor, and C. D. Winant. Asymmetric Beams in Cosmic Microwave Background Anisotropy Experiments. *ApJSuppl.*, 132 :1–17, January 2001.
  - [38] J.-C. Hamilton. Note interne à la collaboration ARCHEOPS.
  - [39] Pablito Fosalba, O. Doré, and F.R. Bouchet. Elliptical Beams in CMB Temperature and Polarization Anisotropy Experiments : An Analytic Approach. *Phys. Rev. D* *in press*, 2001.
  - [40] P. de Maagt, A. Polegre, and G. Crone. Straylight evaluation of the carrier configuration. *ESA technical report*, 1998.
  - [41] J. Delabrouille. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1998.
  - [42] R. Teyssier *et al.* . An iterative approach to component separation. *en préparation*.
  - [43] M. Natoli *et al.* . Non-iterative methods to estimate the in-flight noise properties of CMB detectors. *soumis à A&A*, 2001.

## Chapitre 3

# ... à une extraction *hiérarchique* du spectre de puissance

*A*u chapitre précédent, nous avons vu comment obtenir, à partir d'un flot temporel, une carte bruitée "optimale", conjointement à une évaluation du spectre de puissance temporelle, d'où l'on peut déduire une estimation de la matrice de variance-covariance du bruit. Aussi, reconsidérant notre équation conductrice 1.15, nous avons trouvé  $x_p$  et  $N_{tt'}$  maximisant le premier terme  $\mathcal{L}(d_t^\nu | x_p^\nu, N_{tt'}, I)$ . L'étape suivante consiste à extraire le spectre de puissance angulaire de cette carte, *i.e.* à trouver  $\mathcal{C}_\ell$  maximisant la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(x_p^\nu | \Theta, \mathcal{C}_\ell, N_{tt'}, I)$ .

Ce chapitre décrit une méthode originale permettant cette mesure de  $\mathcal{C}_\ell$ . Il est le fruit d'une collaboration avec Lloyd Knox et Alan Peel, tous deux de l'Université de Californie à Davis (UC Davis). Il a fait l'objet d'une publication [1] reproduite en annexe .2.

Au delà d'en être la suite naturelle, ce chapitre possède certaines analogies avec le précédent : il nous rappelle combien délicate peut-être la mise en pratique de principes simples. Ainsi, les fondements de cette mesure, une approche de maximum de vraisemblance, sont relativement simples et bien connus [2, 3]. Là aussi, leurs transpositions les plus simples, tel le code MADCAP [4], ont été applicables jusqu'à maintenant, mais ont atteint leurs limites [5]. Motivé par les besoins d'expériences présentes ou futures, telles ARCHEOPS, TopHat ou PLANCK, nous devons donc développer des méthodes alternatives, *approximatives* mais réalisables. Enfin, ici encore, une approche multi-grille, devenant *hiérarchique*, se révélera particulièrement efficace.

Aussi dans ce chapitre, nous commencerons par exposer, dans la section 3.1, les fondements de cette méthode, ses limitations, et notre solution, avant de démontrer son efficacité sur des simulations dans la section 3.2. Nous exposerons ensuite, dans la section 3.3, pourquoi nous pouvons l'appliquer à des cartes

“mégapixels” avant de la comparer dans la section 3.4 à d’autres méthodes proposées récemment. Dans cette même section 3.4, nous tâcherons toujours de discuter de manière critique les hypothèses requises, et en profiterons pour proposer plusieurs pistes pour de futures recherches.

### 3.1 Principes de la *décomposition hiérarchique*

Étant donnée une carte optimale du ciel et une évaluation de la matrice de variance-covariance du bruit, nous désirons :

- une évaluation du spectre de puissance angulaire,  $\mathcal{C}_\ell$  éventuellement binné dans des bandes,  $\mathcal{C}_b$  ;
- la matrice de Fisher associée, nous donnant les corrélations entre les estimations de la puissance de ces bandes.

L’évaluation exacte du spectre de puissance par maximum de vraisemblance à partir d’une carte avec  $\mathcal{N}_p \sim 5 \times 10^5$  à une résolution donnée est difficilement possible sur les super-calculateurs actuels. Le principe de la méthode est le suivant. Étant donné un nombre de pixels  $n_p$  que l’on juge raisonnable, *i.e.* traitable en un temps raisonnable (disons quelques minutes), nous dégradons la résolution de la carte initiale de telle sorte que son nombre de pixels soit de l’ordre de  $n_p$ . On divise ensuite cette carte dégradée en 4 tout en augmentant la résolution d’un facteur 2 seulement. Nous obtenons alors un jeu de 4 cartes de “taille traitable”. Nous répétons cette opération jusqu’à atteindre la résolution nominale. Ce jeu de cartes à différentes résolutions est sensible à différentes bandes. L’espoir (avéré, disons le tout de suite pour les lecteurs anxieux) est qu’après mesure des  $\mathcal{C}_\ell$  sur chacune de ces cartes et combinaison optimale, on obtienne une bonne approximation du spectre de puissance de la carte initiale à pleine résolution. Avant de discuter plus en détail notre méthode, dérivons tout d’abord l’estimateur de maximum de vraisemblance pour une carte donnée.

#### Des estimateurs quadratiques...

Nous décrivons ici l’usage des estimateurs quadratiques maximisant la fonction de vraisemblance. Étant donné une carte bruitée, comme nous l’avons dans le chapitre introductif à cette partie, l’usage du théorème de Bayes nous permet de réécrire facilement, en supposant un *a priori* uniforme

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_\ell | x_p) \propto \mathcal{L}(x_p | \mathcal{C}_\ell) . \quad (3.1)$$

Pourvu que l’on suppose, sur la carte, le *signal*  $s_p$  et le *bruit*  $n_p$ , *Gaussien* et *décorellés*, alors la matrice de corrélation de la carte est la somme des matrices de corrélation du signal,  $S_{pp'} \equiv \langle s_p s_{p'} \rangle$ , et du bruit,  $N_{pp'} \equiv \langle n_p n_{p'} \rangle$ , et peut s’écrire

$$C_{pp'} \equiv \langle x_p x_{p'}^T \rangle \quad (3.2-a)$$

$$= \langle (s_p + n_p)(s_{p'} + n_{p'})^T \rangle \quad (3.2-b)$$

$$= S_{pp'} + N_{pp'} . \quad (3.2-c)$$

Si l'on suppose, comme cela a été motivé dans le chapitre introductif, que le signal du ciel est une réalisation d'un champ Gaussien et isotrope dont on cherche le spectre de puissance  $\mathcal{C}_\ell$ , alors on peut écrire

$$-2 \ln \mathcal{L}(x_p | \mathcal{C}_\ell) = \ln \det C + x^T C^{-1} x . \quad (3.3)$$

La dépendance en  $\mathcal{C}_\ell$  de cette fonction se cache dans la matrice  $S$ , qui s'écrit, en effet,

$$S_{pp'} = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} \mathcal{C}_\ell \mathcal{W}_{pp'}(\ell) , \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{W}$  est une fonction fenêtre définissant la couverture du ciel propre à une expérience, donnée par

$$\mathcal{W}_{pp'}(\ell) = B^2(\ell) P_\ell(\cos \theta_{pp'}) , \quad (3.5)$$

où  $B(\ell)$  dénote la fonction fenêtre des pixels. Une telle écriture de  $B$  suppose implicitement que ces pixels soient dans une bonne approximation isotropes et de forme constante. Notons que, par la suite, on approximera cette fonction fenêtre par une Gaussienne, si bien que  $B^2(\ell) = e^{-\ell^2 \sigma_p^2}$ . Ce facteur rend simplement compte de la perte d'information à une échelle sub-pixel.

Pour maximiser la fonction  $\mathcal{L}$ , une méthode itérative de type Newton-Raphson [6] est adéquate. Introduite dans ce contexte par [2], elle se justifie par un simple développement de Taylor autour du maximum.

En toute généralité, on peut écrire, au voisinage d'un point  $\mathcal{C}_\ell$ ,

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\mathcal{C}_\ell + \delta \mathcal{C}_\ell | x_p) &= \ln \mathcal{L}(\mathcal{C}_\ell | x_p) + \sum_{\ell'} \delta \mathcal{C}_{\ell'} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\ell' \ell''} \delta \mathcal{C}_{\ell'} \delta \mathcal{C}_{\ell''} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'} \partial \mathcal{C}_{\ell''}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) + \mathcal{O}(\delta \mathcal{C}_\ell^2) , \end{aligned} \quad (3.6-a)$$

aussi, étant donné un premier choix, pas trop éloigné du maximum, le  $\delta \mathcal{C}_\ell$  nous emmenant au maximum peut s'écrire directement,

$$\delta \mathcal{C}_\ell = -\frac{1}{2} \sum_{\ell'} \left[ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'} \partial \mathcal{C}_{\ell''}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) \right]^{-1} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) . \quad (3.7)$$

Les dérivées premières et secondes de  $\ln \mathcal{L}(\mathcal{C}_\ell | x_p)$  s'écrivent simplement,

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) = \frac{1}{2} \left( x^T C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}} C^{-1} x - \text{Tr} \left[ C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}} \right] \right) \quad (3.8-a)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mathcal{C}_{\ell'} \partial \mathcal{C}_{\ell''}}(\mathcal{C}_\ell | x_p) \right\rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{C}_{\ell'}} C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{C}_{\ell''}} \right] \equiv -F_{\ell' \ell''} \quad (3.8-b)$$

où l'on rappelle la définition de la matrice de Fisher, *i. e.* la matrice de courbure de la fonction de vraisemblance.

Ces calculs nous mènent à

$$\delta\mathcal{L}_\ell = \frac{1}{2} \sum_{\ell'} F_{\ell\ell'}^{-1} Tr \left[ (xx^T - C) \left( C^{-1} \frac{\partial C}{\partial C_{\ell'}} C^{-1} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Cette dernière équation définit le bien connu “estimateur quadratique”<sup>1</sup>, dérivé également par [7]. Du fait que  $\ln \mathcal{L}$  ne soit pas Gaussien en général, ce développement de Taylor ne sera qu’une approximation, d’où la nécessité en pratique de quelques itérations (au plus 5), *i.e.* plusieurs évaluations successives de  $\delta\mathcal{L}$ .

### ... et de leur implémentation limitée.

Une fois encore, cette évaluation se révèle délicate en pratique. Considérant  $\mathcal{N}_b$  bandes, le nombre d’opérations et la mémoire requis, sont respectivement proportionnels à  $\mathcal{N}_b^2 \mathcal{N}_p^3$  et  $\mathcal{N}_b \mathcal{N}_p^2$ , poussant déjà les besoins actuels au-delà des limites des possibilités des super-calculateurs. PLANCK, pour lequel  $N_p = 10^7$  nécessiterait 25 000 ans de calcul sur un ordinateur à 400 Mhz et 1600 Tb de stockage [4]. . . Ceci appelle nécessairement des algorithmes approximatifs calculant ces estimateurs de vraisemblance de manière certes moins précise mais également moins coûteuses. Parmi ceux-ci, un approche *hiérarchique* semble particulièrement appropriée<sup>2</sup>. Les vertus d’une décomposition *hiérarchique* peuvent être argumentées simplement.

### Des espoirs d’une décomposition hiérarchique

Considérons que l’on veuille évaluer  $\mathcal{N}_b$  bandes sur une carte de  $\mathcal{N}_p$  pixels. Considérons des sous-cartes de tailles  $n_p$  à différentes résolutions. Si l’on considère par simplification que  $\mathcal{N}_p = 4^n n_p$  alors le nombre de sous-cartes est

$$\mathcal{N}_{cartes} = \sum_{i=0}^n 4^i = \frac{4^{n+1} - 1}{3} = \frac{4\mathcal{N}_p/n_p - 1}{3} \propto \mathcal{N}_p/n_p. \quad (3.10)$$

L’estimation du spectre de puissance et de la matrice de Fisher pour chaque sous-carte nécessite de l’ordre de  $\mathcal{N}_b^2 n_p^3$  opérations. Aussi, l’évaluation sur l’ensemble de ces cartes nécessitera de l’ordre de  $\mathcal{N}_b^2 \mathcal{N}_p n_p^2$  opérations.

Pour un nombre de sous-cartes suffisamment grand, *i.e.* pour  $\mathcal{N}_p$  grand, l’étape limitante sera la corrélation des estimations effectuées sur chacune de ces cartes. Cette corrélation nécessite  $n_p^3$  opérations comme cela sera détaillé ci-dessous. Devant corréler les estimations de  $1/2 \mathcal{N}_{cartes} (\mathcal{N}_{cartes} + 1) \propto \mathcal{N}_p^2 / n_p^2$

<sup>1</sup> Ce nom attribué désormais à cet estimateur semble être un peu usurpé car peu d’estimateurs de spectre de puissance ne sont pas quadratiques. . .

<sup>2</sup> Notons qu’en plus de l’invention de la méthode de Newton-Raphson, il est revendiqué de manière erronée dans [7] un algorithme en  $\mathcal{N}_p^2$ . Ce compte néglige en effet un pré-facteur crucial en  $\mathcal{N}_p^3$ .

paires de sous-cartes et de  $\mathcal{N}_b^2$  bandes, cette corrélation coûtera de l'ordre de  $\mathcal{N}_b^2 \mathcal{N}_p^2 n_p$  opérations.<sup>3</sup>

Comme ces simples évaluations le démontrent, cette décomposition hiérarchique permet de passer à un nombre d'opérations en  $\mathcal{N}_p^2$  ce qui constitue déjà un énorme progrès. Mieux encore, comme nous le verrons par la suite, moyennant quelques approximations justifiées par l'expérience, ce nombre peut devenir une fonction *linéaire* de  $\mathcal{N}_p$ .

Remarquons par ailleurs que cet algorithme est naturellement parallèle au sens où chaque opération d'évaluation et de corrélation peut-être effectuée indépendamment. Nous avons donc affaire à *un parallélisme de tâches* ou l'usage de  $n_{cpu}$  peut-être quasi-optimale pourvu que ce nombre soit inférieur à  $\mathcal{N}_p^2/n_p^2/2$ .

Mais, avant de pousser plus avant et de démontrer l'efficacité de cette méthode, discutons certains points clefs touchant à sa réalisation pratique.

## 3.2 Mise en oeuvre

La mise en oeuvre d'une telle méthode appelle à définir plus précisément certaines étapes essentielles. Parmi elles, la manière de combiner les estimations de chaque carte, le nombre de pixels des sous-cartes, la manière de dégrader la résolution. Les principes régissant la solution à chacun de ces points sont discutés ci-dessous brièvement.

Ici encore, les différentes résolutions seront définies par les niveaux  $k$ , reliés au paramètre de résolution  $N_{side}$  de la pixelisation HEALPix, par  $N_{side} = 2^k$ .  $k$  croît donc avec la résolution.

### Comment recombinaison optimalement des estimations ?

Naturellement, les estimations de  $\delta\mathcal{C}_\ell$  effectuées sur ces sous-cartes (qu'elles soient différentes ou non) ne sont pas indépendantes. Aussi, il convient tout d'abord d'évaluer cette corrélation, de combiner en conséquence puis d'en déduire la corrélation entre les estimations finales dans différentes bandes.

À partir de la définition d'un estimateur quadratique donnée par Eq. (3.7) il est aisé de montrer que la corrélation entre deux estimations effectuées sur deux cartes  $\alpha$  et  $\beta$  de résolution quelconque sont :

$$\langle \delta\mathcal{C}_\ell^\alpha \delta\mathcal{C}_{\ell'}^\beta \rangle \equiv \mathcal{F}_{\alpha\ell, \beta\ell'}^{-1} \quad (3.11-a)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\ell''', \ell''''} (F_\alpha^{-1})_{\ell \ell'''} (F_\beta^{-1})_{\ell' \ell''''} \text{Tr} [A_{\alpha, \ell'''} C_{\alpha\beta} A_{\beta, \ell''''} C_{\beta\alpha}] \quad (3.11-b)$$

où on a défini

$$A_{\alpha, \ell} \equiv C_{\alpha\alpha}^{-1} \frac{\partial C_{\alpha\alpha}}{\partial \mathcal{C}_\ell} C_{\alpha\alpha}^{-1}, \quad (3.12)$$

---

<sup>3</sup>Remarquons que la comptabilité précédente semble indiquer que nous avons intérêt à faire tendre  $n_p$  vers 0. Ceci n'est bien sûr pas le cas car, comme nous le verrons plus tard, la résolution spectrale deviendrait également nulle.

et où  $C_{\alpha\beta}$  désigne la matrice de corrélation entre deux cartes.

Étant donné cette évaluation, nous savons comment combiner ces estimations, combinaison optimale pourvu que nous fassions l'hypothèse que ces erreurs soient distribuées de manière Gaussienne (ce qui est approximatif, ainsi que cela sera discuté ci-dessous)<sup>4</sup>. Les  $\delta\mathcal{C}_{\ell'}$  de variance minimales seront alors donnés par :

$$\sum_{l'} \left( \sum_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'} \right) \delta C_{l'} = \sum_{\alpha\beta l'} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'} \delta \mathcal{C}_{\ell'}^\alpha \quad (3.13)$$

et leur matrice de poids (inverse de la matrice de variance-covariance) par :

$$F_{ll'} = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'}. \quad (3.14)$$

### Comment déterminer la taille des sous-cartes ?

Comme nous l'avons vu précédemment, le nombre d'opérations requis décroît avec le nombre de pixels dans les sous-cartes. Toutefois, notre capacité à séparer des modes  $\ell$  espacés de  $\delta\ell$  est déterminée par l'égalité  $\delta\ell = \pi/\theta_c$ , où  $\theta_c^2 \propto n_p/\mathcal{N}_p$  est une dimension angulaire caractéristique de la plus-petite sous-carte<sup>5</sup>. Aussi,  $n_p$  doit être suffisamment grand pour maintenir la résolution spectrale à un niveau satisfaisant. Notons que ceci s'observe naturellement à travers les corrélations  $\langle \delta\mathcal{C}_\ell \delta\mathcal{C}_{\ell'} \rangle$  constituant les éléments de la matrice de Fisher.

En pratique, le spectre de puissance des cartes de température attendu ne possède pas de structures plus fine que  $\delta\ell < 30$ . L'évaluation de 2500 pixels étant suffisamment rapide, nous pouvons donc définir

$$n_p \simeq 2.5 \times 10^3 \left( \frac{30}{\delta\ell} \frac{13.7'}{\theta_p} \right)^2. \quad (3.15)$$

où  $\theta_p$  désigne la largeur angulaire d'un pixel. Cette prescription sera appliquée par la suite.

### Comment dégrader optimalement une sous-carte ?

Contrairement au cas de la fabrication de cartes présenté précédemment, nous ne désirons ici que dégrader des cartes. De façon générale, on peut décrire cette opération linéaire comme suit

$$x^{k+1} = W^{-1} \alpha w x^k, \quad (3.16)$$

où  $\alpha_{pP}$  vaut 1 pour tout les pixels de  $x_p^k$  dégradés en  $x_p^{k+1}$  et où  $W = \alpha w \alpha^T$ . Remarquons qu'en présence de bruit corrélé, une analogie directe avec la section

---

<sup>4</sup>Notons que la corrélation précédente nous ramène au résultat  $\langle \delta\mathcal{C}_\ell \delta\mathcal{C}_{\ell'} \rangle = F_{ll'}^{-1}$ , si  $\alpha = \beta$ .

<sup>5</sup>A noter l'analogie quantique, naturelle mais élégante, développée en [8].

précédente nous permet de définir une dégradation optimale définie par  $w = N_{pp'}^{-1}$ .  $x^k$  joue alors le rôle de flot temporel ( $d$ ) et  $\alpha$  celui d'opérateur de projection ( $A$ ).

Une pondération optimale, si nécessaire, requiert l'inversion de  $W$ , ce qui est substantiellement moins coûteux que l'inversion de  $N$  (sur la carte fine), car nécessitant 16 fois moins d'opérations. Là aussi, la structure particulière de  $W$  offre la possibilité d'inversions plus rapides.

### 3.3 Applications et Perspectives pour les cartes megapixels

#### Première Application

Pour démontrer l'efficacité de cette méthode, considérons une première simulation pour laquelle  $\mathcal{N}_p = 10^4$ .

Fixant  $n_p = 2500$ , nous sommes amenés à considérer deux niveaux de résolution. Le niveau de bruit ( $20\mu\text{K}$  par pixel de  $(13.7')^2$ ) et la taille du lobe instrumental ( $20'$ ) considérés correspondent aux performances d'expériences de type ballon. Le bruit n'a aucune corrélation spatiale et est homogène.

Dans ce premier cas, le nombre relativement faible de pixels nous permet de comparer nos résultats avec ceux obtenus par une méthode exacte (à la MADCAP), *i.e.* calculant explicitement un estimateur quadratique sur la carte initiale. Cette comparaison est explicitée sur la figure 3.1.

La partie supérieure de la figure de gauche nous montre les estimations de spectre de puissance effectuées pour les sous-cartes à haute résolution et celles à faible résolution. La partie inférieure nous montre leur combinaison optimale ainsi que le résultat "exact". Les barres d'erreurs tracées correspondent à la racine carrée des éléments diagonaux de l'inverse de la matrice de Fisher. La ligne continue correspond au spectre dont le ciel complet est une réalisation.

L'accord est de toute évidence excellent. Les différences sont inférieures à 20 % des barres d'erreurs. Non seulement, l'estimation du spectre est correcte, mais celle des erreurs l'est aussi, comme illustré par la figure de droite où sont tracés quelques rangs de la matrice de Fisher "exacte" et évalué après décomposition hiérarchique et recombinaison. Les barres d'erreurs ne sont augmentées que d'au plus 10 % (ce qui est compatible avec la dispersion de 20 %).

#### Extrapolation et approximations supplémentaires

Ce résultat très encourageant nous pousse naturellement à extrapoler ces données en utilisant l'évolution du nombre d'opérations précédemment exposée et vérifiée.

Nous évaluons le temps requis pour l'évaluation de  $\mathcal{N}_b$  bandes à partir d'une carte de  $\mathcal{N}_p$  pixels divisés en sous-cartes de  $n_p$  éléments à :

$$t \sim 1 \text{ an} \left( \frac{500}{n_{\text{cpu}}} \right) \left( \frac{\mathcal{N}_p}{3 \times 10^6} \right)^2 \left( \frac{n_p}{2500} \right) \left( \frac{\mathcal{N}_b^2}{1000} \right). \quad (3.17)$$



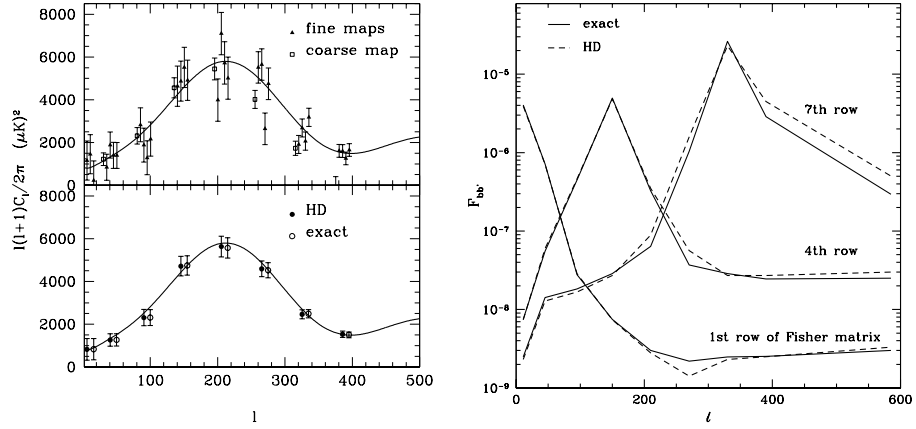


FIG. 3.1

Résultat de la simulation avec  $\mathcal{N}_p = 10\,000$ . Figure de gauche, partie supérieure : Estimation du spectre de puissance des 4 cartes individuelles, à pleine résolution, de 2500 pixels, et de 1 carte, de résolution 4 fois moindre, de 2500 pixels. Figure de gauche, partie inférieure : estimation du spectre de puissance en combinant optimalement les résultats individuels précédents (disques) et en effectuant l'évaluation exacte (cercles). Notez que dans ces deux panneaux, les points sont légèrement décalés pour plus de clarté. Figure de droite : 3 rangs de la matrice de Fisher calculés exactement (ligne solide) et estimé par décomposition hiérarchique (ligne continue) (unités arbitraire).

Ainsi donc, l'analyse d'une carte de type PLANCK prendrait un an malgré l'usage intensif de 500 processeurs. Par rapport au chiffre de 25 000 ans (sur un processeur) annoncé précédemment, nous avons donc déjà progressé d'un facteur 50. Ceci est certes un progrès considérable par rapport à une approche directe et rend cette méthode applicable telle quelle, facilement, pour les expériences de type ballon (ARCHEOPS ou TopHat où  $\mathcal{N}_p \sim 5 \times 10^5$  et  $\mathcal{N}_b \sim 10$ ), mais n'est pas encore suffisante pour PLANCK. Nous avons donc besoin d'approximations supplémentaires. Il suffit de remarquer que l'étape limitante est constituée par la corrélation des sous-cartes, pour que l'idée de négliger certaines de ces corrélations apparaissent.

Ces approximations seront amplement motivées au regard des résultats du second des cas considérés.

Afin de se rapprocher encore des conditions rencontrées en pratique, nous considérons cette fois le cas d'un bruit très inhomogène pour une carte avec  $\mathcal{N}_p = 40\,000$  pixels. Le lobe instrumental est le même mais le bruit est cette fois hautement inhomogène puisque la rms par pixel varie d'un facteur 9.

Les résultats d'une analyse par décomposition hiérarchique sont présentés sur la figure 3.2 ainsi que la moyenne pondérée naïve, *i.e.* négligeant les corrélations, de toutes les cartes à une résolution donnée.

Une première remarque, frappante, peut être faite : la moyenne naïve donne des résultats tout à fait raisonnables. Cet accord, au moins à grand  $\ell$ , signifie que les corrélations entre sous-cartes sont faibles, puisqu'à grand  $\ell$  seules les cartes du niveau maximal contribuent. Ceci conforte donc l'idée de négliger la plupart de ces corrélations. Si l'on considère en plus qu'une bande donnée est influencée simplement par 2 ou 3 niveaux, alors, calculer les seules corrélations entre cartes, soit voisines soit se superposant, et appartenant à des niveaux adjacents, mène aux temps suivant :

$$t = 78 \text{ hrs} \left( \frac{200}{n_{\text{cpu}}} \right) \left( \frac{\mathcal{N}_p}{10^7} \right) \left( \frac{n_p}{5000} \right)^2 \left( \frac{\mathcal{N}_b}{40} \right) \left( \frac{\Delta \mathcal{N}_b}{3} \right) \quad (3.18)$$

où l'on a calculé uniquement les corrélations entre les  $\Delta \mathcal{N}_b$  bandes voisines. Nous arrivons donc au résultat remarquable d'un temps linéaire en  $N_p$  ! <sup>6</sup> Pour obtenir ce résultat, le seul à ce jour à rendre compte de la pleine complexité de PLANCK (bruit corrélé, inhomogène et taille des données), nous nous sommes fixés une résolution spectrale de  $\delta\ell = 45$  ce qui implique  $n_p = 5000$  pour  $\theta_p = 3.5'$  ( $N_{\text{side}} = 2048$ ).

### 3.4 Discussions

#### De la décomposition hiérarchique...

La méthode que nous avons présentée est efficace et d'hors et déjà utilisée pour les expériences ARCHEOPS et TopHat. Elle fait l'objet d'un code FORTRAN 90, parallélisé au moyen du protocole MPI. <sup>7</sup> Il est par ailleurs publique.

À l'heure de sa publication, elle était la seule à fournir une réponse au problème de la mesure des  $\mathcal{C}_\ell$  pour l'expérience PLANCK en tenant compte de toute sa complexité, tant en termes de taille des données, de l'inhomogénéité du bruit et de ses *propriétés de corrélation*. Ce dernier point constitue peut-être son avantage majeur.

Même si la prise en compte adéquate d'un bruit corrélé n'a pas été démontrée en pratique, il fait peu de doute qu'elle puisse être. Quelle que soit l'échelle d'une carte, le bruit y est traité de manière optimale par manipulation explicite de la matrice de bruit. Aussi, la seule information concernant le bruit qui soit perdue concerne les corrélations entre cartes. Celles-ci étant, comme on l'a vu, très faible pour le signal, elles le seront encore plus pour le bruit.

Une autre propriété importante de cette méthode est l'absence de besoin non seulement d'inverser, mais aussi de *stocker la matrice* de bruit à pleine

<sup>6</sup>Ce temps est linéaire en  $\mathcal{N}_p$  pourvu que  $n_p$  soit fixe. Si l'on fixe la résolution spectrale  $\delta\ell$  et varie  $\mathcal{N}_p$  alors  $n_p \propto \mathcal{N}_p$  et on retrouve donc  $t \propto \mathcal{N}_p^3$ .

<sup>7</sup>Ce parallélisme a été testé de manière satisfaisante jusqu'à 77 cpu.

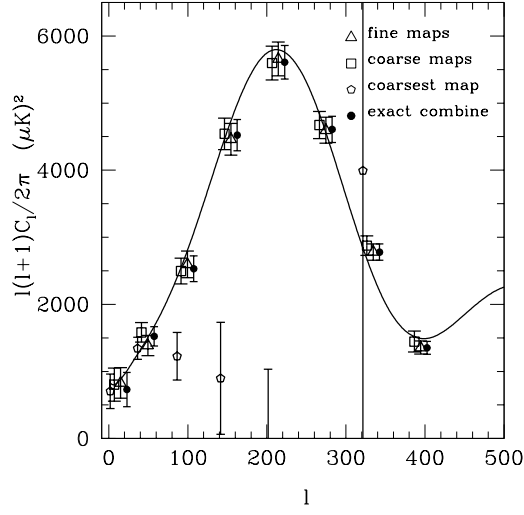


FIG. 3.2

Résultats d'une analyse hiérarchique d'une carte 200 par 200 présentant un bruit fortement inhomogène. 16 sous cartes à pleine résolution ont été considérées (niveau 8,  $13.7^{1/2}$  pixels), 4 au niveau intermédiaire (niveau 7,  $27.5^{1/2}$  pixels) et une au niveau le plus dégradé (niveau 6,  $55^{1/2}$  pixels). Les triangles et les carrés représentent les résultats d'une simple moyenne pondérée, *i.e.* négligeant les corrélations, par résolutions, des 16 cartes du niveau 8 et des 4 cartes du niveau 7. Les pentagones représentent les résultats pour l'unique carte de niveau 6. Les disques représentent la combinaison des estimations de toutes les cartes. La corrélation d'aucune paire de cartes n'est négligée. Comme dans la figure 3.1, les points sont décalés horizontalement, par souci de clarté.

résolution. Seules certaines parties sont enfin nécessaires à un moment donné et peuvent donc être calculées à la volée (1.5 Tb en simple précision). Ceci correspond particulièrement aux capacités des méthodes d'inversion itératives telle que celle proposée par [9].

Enfin, cette méthode, outre sa grande modularité - *i.e.* on peut réévaluer séparément certaines cartes - a l'avantage de travailler dans l'espace des pixels, ce qui permet facilement de sous-pondérer ou sur-pondérer certaines zones où le signal est supposé moins bon, par exemple à cause de signaux astrophysiques d'avant-plan. . . . Elle est ainsi très générale et applicable à toutes les stratégies d'observation.

Son désavantage réside dans la perte de résolution spectrale inhérente à cette subdivision.

### ... et d'autres méthodes alternatives.

Pour faire bonne mesure, un examen précis des autres méthodes proposées dans la littérature jusqu'à aujourd'hui est important. En effet, certaines solutions ont été proposées pour contourner ce "terrible  $\mathcal{N}_p^3$ " [10].

Tout d'abord, exploitant la structure particulière impliquée dans les matrices  $A$  et  $N_{pp'}$  par certaines symétries de la stratégie de balayage du ciel et certaines propriétés de leur instrument (bruit quasiment décorélé), l'équipe du satellite MAP a obtenu une loi en  $\mathcal{N}_p^2$  [11]. De manière plus générale, ces matrices possèdent certaines structures non encore exploitées pouvant améliorer considérablement ce facteur, et appelant par exemple, des techniques approximatives mais rapides de calcul de trace [9].

Une autre famille de solution se base sur l'analyse suivante : alors que les propriétés du bruit sont bien décrites dans le domaine temporel (structure diagonale de  $\tilde{N}_{tt'}$ ), et celles, du signal dans la base des harmoniques sphériques (structure diagonale dans la base des  $a_{\ell m}$  pour le CMB au moins), ni les unes ni les autres ne se décrivent aisément dans une autre base ( $N_{pp'}$  est, par exemple, dense). Il serait donc intéressant de trouver une base autre où les deux puissent se décrire simplement. Cette base existe pour la classe particulière d'expériences observant le ciel au moyen de grands cercles [10] : il s'agit de la base des anneaux introduite par [12]. Ces anneaux correspondent à un rééchantillonnage de  $n$  cercles adjacents temporellement décrivant sur le ciel un anneau de largeur  $\delta\phi$ . Cette voie est, certes, prometteuse [13], mais n'a pas encore démontré toute son applicabilité, principalement du fait qu'elle repose sur certaines hypothèses expérimentales critiques, telle la stationnarité du balayage du ciel (voir chapitre 2). Ainsi, alors que cette classe englobe en principe ARCHEOPS ou TopHat, leurs observations trop "chahutées" ont rendu cette méthode caduque. Espoir est permis qu'elle soit toutefois applicable dans des conditions meilleures, telles celles des satellites MAP ou PLANCK.

Enfin, d'autres approches tentent de mettre à profit la rapidité des transformations en harmonique sphérique, caractéristique de la pixelisation HEALPix et de ces cercles iso-lattitudes. Considérant tout d'abord des couvertures éventuellement inhomogène (faiblement) mais à symétrie de révolution, il a été dérivé les statistiques des  $\mathcal{C}_\ell$  observés ou "pseudo- $\mathcal{C}_\ell$ " [14]. Une méthode de débiaisage sommaire du biais introduit par le bruit  $y$  a été proposée. Par la suite, il a été pleinement développé [15] et appliqué lors de la seconde analyse des données BOOMERanG [16] une approche de type Monte-Carlo par couplage à un fabricant de cartes rapide, comme suggéré dans le chapitre 2. Cette méthode est de toute évidence rapide et efficace. Pour PLANCK, le temps de calcul nécessaire est estimé à

$$t_{total} \sim 24 \text{ jrs} \left( \frac{n_{real}}{300} \right) \left( \frac{8}{n_{cpu}} \right). \quad (3.19)$$

Notons que le nombre de réalisations ( $n_{real}$ ) désiré sera certainement plus grand puisque avec 300 réalisations la précision sur l'évaluation du spectre et des erreurs ne peut être meilleure que 10 %, mais par contre, le nombre de processeurs disponibles sera nettement plus important. Toutefois la difficile correction de la

convolution opérée par la fonction fenêtre ainsi que la difficulté de description du bruit dans cet espace, imposent de se restreindre à une forme simple de fonction fenêtre (de manière à pouvoir être traité analytiquement) et contraignent à une structure de bruit faiblement corrélé (en pratique la partie non-diagonale de la matrice de bruit dans l'espace des  $a_{\ell m}$  est négligée). Aussi, même si moins générale, cette approche semble être très compétitive face à la notre.

Enfin, fort de l'expérience acquise dans l'étude des catalogues de galaxies, la mesure du spectre de puissance à partir d'une mesure préliminaire de la fonction de corrélation à deux points a été récemment défendue [17]. Un avantage certain de cette méthode est, comme pour la notre, et par opposition à celle précédemment décrite, que le fait de travailler dans l'espace réel permet une description aisée du bruit et une correction immédiate de la fonction fenêtre [18]. Cette mesure n'inclut pas *a priori* la détermination des erreurs et doit donc être suffisamment rapide pour permettre une approche de type Monte-Carlo. Naturellement en  $\mathcal{N}_p^2$ , il a été proposé d'obtenir (et obtenu <sup>8</sup>) un comportement en  $\sim \mathcal{N}_p \ln \mathcal{N}_p$  en utilisant des techniques de type "KD-tree" [19].

Finalement il a été proposé [20] d'utiliser conjointement la rapidité de la transformée en harmonique sphérique sous HEALPix et les vertus d'une approche par fonctions de corrélations, en mesurant tout d'abord rapidement un  $\mathcal{C}_\ell$  par simple transformée en harmonique sphérique rapide, avant d'en déduire une fonction de corrélation que l'on corrige du bruit et de la fonction fenêtre, puis dont on déduit une évaluation des  $\mathcal{C}_\ell$  (alors déconvolué de la fonction fenêtre et dé-biaisé du bruit, au moins approximativement), effectuant ainsi un aller-retour entre espace de Fourier et espace réel. Cette idée simple et efficace donne à cette méthode un comportement en  $\mathcal{N}_p^{1.61}$ , loi imposée par la transformée en harmonique sphérique. Parmi les avantages certains de cette méthode astucieuse, sa rapidité, et son extension possible à la mesure des fonctions de corrélations à  $n$ -points, fonctions dont l'intérêt pour la mesure de la non-Gaussianité sera discuté dans le chapitre 5. Les inconvénients potentiels viennent du fait que le traitement du bruit ne se fait que par une pondération "heuristique" des paires de points. Cette pondération, pour être optimale, requiert la connaissance de la matrice de poids (d'un coût en  $\mathcal{N}_p^3$ ); aussi une pondération sous-optimale est-elle nécessaire (généralement par la diagonale de  $N_{pp'}$ ). Le comportement de cette méthode en présence d'un bruit corrélé n'est donc pas évident. Enfin, naturellement une approche de type Monte-Carlo est indispensable pour évaluer les erreurs. L'approche décrite précédemment [15] se trouve énormément allégée par cette excursion dans l'espace réel. Notons qu'en écho à ces vertus défendues d'une mesure de  $\mathcal{C}_\ell$  via la fonction de corrélation, il a été montré l'intérêt d'une approche dans l'espace réel pour explorer analytiquement la physique de la recombinaison [21, 22].

En conclusion, notre méthode robuste et générale co-existe avec des méthodes, très rapides, à base de transformées en harmonique sphérique, ayant abandonné les estimateurs de maximum de vraisemblance au profit d'estimateurs de type Monte-Carlo. Nul doute que dans les prochaines années, ces deux

---

<sup>8</sup>S. Colombi *et al.*, résultat non publié

types d'approche seront appliquées de manière complémentaire.

### 3.4.1 Extensions

Les extensions les plus naturelles de ce travail trouvent leur origine une fois encore dans un examen critique des hypothèses nécessaires à notre méthode.

Parmi celles-ci, notons que nous supposons la Gaussianité à deux endroits distincts.

- Tout d'abord, celle du signal et du bruit. Le bruit est raisonnablement espéré Gaussien sur une carte. Le statut de la Gaussianité du signal lui est plus subtil, puisque non-dénué d'enjeux physiques profonds comme nous le verrons dans le chapitre 5. Même si dans tous les cas, les dernières mesures suggèrent que la non-Gaussianité du CMB est faible [23, 24], la question se pose de savoir ce que signifie la recherche d'une éventuelle composante non-Gaussienne (problème pour lequel nous proposerons une méthode au chapitre 5), dans un signal traité au moyen d'opérateurs établis sur sa Gaussianité. Pour quantifier ce problème, des études de type Monte-Carlo seront probablement nécessaires.
- Nous avons également supposé la Gaussianité des incertitudes liées aux  $\mathcal{C}_\ell$ , en ne les spécifiant que par le maximum de la fonction de vraisemblance et sa matrice de courbure (ou matrice de Fisher). De fait, cette approximation peut conduire à de faux calcul d'erreurs, mais le remède proposé dans [2, 3] est tout à fait approprié, remède qui consiste à considérer que les erreurs sont d'un type "log-normal" décalé. Plus précisément, les erreurs sur la quantité  $Z_\ell \equiv \ln(\mathcal{C}_\ell + x_\ell)$  suivent approximativement une distribution normale. Le décalage  $x_\ell$  mesure simplement la contribution du bruit aux erreurs, *i.e.* n'inclut pas les erreurs cosmiques.

Ainsi la principale piste de recherche découlant de ce travail concerne l'étude des effets de la non-Gaussianité du signal. D'éventuelles approximations supplémentaires, provenant de la structure même des équations constitutives de notre estimateur sont également à l'étude.

# Bibliographie

- [1] O. Doré, L. Knox, and A. Peel. CMB Power Spectrum Estimation via Hierarchical Decomposition. *Phys. Rev. D*, 64 :083001–093009, 2001.
- [2] J. R. Bond, A. H. Jaffe, and L. Knox. Estimating the power spectrum of the cosmic microwave background. *Phys. Rev. D*, 57 :2117–2137, February 1998.
- [3] J. R. Bond, A. H. Jaffe, and L. Knox. Radical Compression of Cosmic Microwave Background Data. *ApJ*, 533 :19–37, April 2000.
- [4] J. Borrill. The Challenge of Data Analysis for Future CMB Observations. In *AIP Conf. Proc. 476 : 3K cosmology*, pages 277+, 1999.
- [5] J. Borrill. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference “ Mining the sky”*, Garching, 2000.
- [6] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes, 2nd ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [7] M. Tegmark. How to measure CMB power spectra without losing information. *Phys. Rev. D*, 55 :5895–5907, May 1997.
- [8] M. Tegmark. A method for extracting maximum resolution power spectra from microwave sky maps. *MNRAS*, 280 :299–308, May 1996.
- [9] P. Koev and J. Borrill. en préparation. 2001.
- [10] B. Wandelt and F. Hansen. Fast, exact CMB power spectrum estimation for a certain class of observational strategie. *soumis à Phys. Rev. D*, 2001.
- [11] S. P. Oh, D. N. Spergel, and G. Hinshaw. An Efficient Technique to Determine the Power Spectrum from Cosmic Microwave Background Sky Maps. *ApJ*, 510 :551–563, January 1999.
- [12] B. Wandelt and K. Gorski. Fast convolution on the sphere. *Phys. Rev. D*, 62 :123002, 2000.
- [13] F. van Leuwen. An harmonic approach to CMB data analysis (titre incertain). *en préparation*.
- [14] B. Wandelt, E. Hivon, and K. Gorski. The Pseudo- $C_l$  method : Cosmic microwave background anisotropy power spectrum statistics for high precision cosmology. *submitted to Phys. Rev. D*, 62, 2000.

- [15] E. Hivon *et al.* . MASTER of the CMB Anisotropy Power Spectrum : A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex CMB Data Sets. *soumis à ApJ*, 2001.
- [16] C. Netterfield *et al.* . A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *soumis à ApJ*, 2001.
- [17] I. Szapudi, S. Prunet, D. Pogosyan, A. S. Szalay, and J. R. Bond. Fast Cosmic Microwave Background Analyses via Correlation Functions. *ApJ Let.*, 548 :L115–L118, February 2001.
- [18] S. Szapudi and A. S. Szalay. A New Class of Estimators for the N-Point Correlations. *ApJ Let.*, 494 :L41–+, February 1998.
- [19] A Moore *et al.* . Fast Algorithms and Efficient Statistics : N-point Correlation Functions. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference “Mining the sky”, Garching*, 2000.
- [20] I. Szapudi, S. Prunet, and S. Colombi. Fast Clustering Analysis of Inhomogeneous Megapixel CMB maps. *soumis à ApJ Let.*, 2001.
- [21] E. Bertschinger. Green’s Function Approach to CMB Anisotropy and the Temperature Correlation Function. In *American Astronomical Society Meeting*, volume 197, pages 7201+, December 2000.
- [22] S. Bashinsky and E. Bertschinger. Position-Space Description of the Cosmic Microwave Background and Its Temperature Correlation Function. *Phys. Rev. Let.*, 87 :081301, 2001.
- [23] M. Santos *et al.* . An estimate of the Cosmological Bispectrum from the MAXIMA-1 CMB map. 2001.
- [24] J. H. P. Wu *et al.* . Tests for Gaussianity of the MAXIMA-1 CMB Map.





## Chapitre 4

# Une description analytique des effets de lobe instrumental

*A*u cours du chapitre 2, notre attention a été attirée sur la difficulté de fabriquer des cartes optimales dans une situation où le lobe instrumental principal n'est pas symétrique. Or, de fait, toutes les expériences récentes ont du faire face à un certain degré d'assymétrie, évalué par exemple pour MAXIMA, ARCHEOPS ou PLANCK, par exemple, à environ 20 % d'ellipticité pour certains canaux [1, 2]. La raison principale en est la position nécessairement décentrée des détecteurs dans le plan focal du télescope.

Dans ce chapitre, nous décrivons un travail effectué en collaboration avec Pablito Fosalba et François Bouchet visant à décrire de façon analytique l'effet d'un lobe elliptique. Il a fait l'objet d'une publication [3] reproduite en annexe .3.

Mais, même si notre travail publié à l'heure actuelle ne traite que d'une description analytique des effets d'asymétrie du lobe principal, nous tacherons dans d'introduire ici plus largement le problème, tant théorique qu'expérimental, posé par la non-symétrie du lobe primaire (lobe principal) mais aussi par la large extension des lobes d' "ordre supérieurs" (lobe lointain). Aussi, nous serons amené à décrire, plus qualitativement, certains de nos travaux en cours.

Ces problèmes sont particulièrement complexes pour PLANCK où, à la difficulté intrinsèque du problème, s'ajoute la grande dimensionalité des données, et ce d'autant plus que la sensibilité espérée requiert une grande maîtrise des effets systématiques au rang desquels figurent naturellement l'asymétrie du lobe principal et la pollution par le lobe lointain. Par exemple, un effet important induit par un lobe principal non-symétrique réside dans la distorsion des cartes d'anisotropies du CMB [4]. Or, cette distorsion pourrait être très difficile à distinguer de celles d'origine gravitationnelle (effet de lentille gravitationnelle dû aux grandes structures), dont on cherche à observer la signature dans le CMB

[5, 6, 7, 8].

L'effet du lobe lointain, lui, est important de par le caractère ténu des fluctuations que l'on cherche à détecter, puisque d'une amplitude  $10^{-5}$  fois plus faible que celle du fond à 2.7 K. Dans les régions de faible latitude galactique, l'intensité du rayonnement de type synchrotron ou bien du rayonnement de la poussière froide, peut dépasser l'intensité des fluctuations du CMB de plusieurs ordres de grandeur [9, 10], si bien que l'intensité de ce rayonnement *millimétrique* diffracté pollue les mesures effectuées, alors même que le télescope pointe dans des directions très éloignées (30 ou 45 deg) [11, 12, 4]. L'amplitude de cette pollution est inférieure à la sensibilité attendue pour les modes de largeur angulaire plus petits que  $10'$  ( $\ell \geq 1100$ ), mais n'est plus négligeable pour les plus grands modes ( $\ell \leq 1100$ ) [13].

Ce problème est d'autant plus difficile que le lobe lointain dépendant principalement de la configuration précise de l'environnement du télescope (boucliers solaires, baflage...), il ne peut être déterminé qu'en vol (d'une manière encore indéterminée). Ceci le distingue du lobe principal qui lui peut être mesuré précisément au sol et en vol par observation de sources brillantes [14, 2].

Aussi, il nous faut, tout d'abord, évaluer et comprendre ces effets, au moyen d'évaluations analytiques ou numériques (simulations), mais aussi apprendre à les corriger, si besoin est, lors de la phase d'analyse des données.

Nous commencerons donc par présenter, dans la section 4.1, une évaluation analytique des effets dus à la non-symétrie du lobe principal, avant de discuter cette évaluation dans la section 4.2, en considérant plusieurs expériences actuelles. Enfin, dans la section 4.3, nous esquisserons les principes d'algorithmes d'analyse (et de simulations) faisant l'objet de projets en cours.

Notons que la complexité de ces effets s'accroît encore dès lors que l'on cherche à mesurer non seulement l'intensité mais aussi la *polarisation* du flux incident, comme nous le verrons dans la première section.

## 4.1 Effets d'un lobe primaire elliptique : une approche analytique

Différents groupes de recherches se sont intéressés à ce problème, mais tous ont eu recours à des calculs simplement numériques, de fait pauvres en explications ou en prescriptions claires [4, 1, 15]. Cette absence a particulièrement motivé notre travail analytique.

La plupart des lobes principaux réels exhibent un écart à la sphéricité pouvant être raisonnablement modélisé en considérant un lobe elliptique [4, 16, 1]<sup>1</sup>. Aussi, nous considérerons tout d'abord les effets d'un lobe elliptique sur la mesure de l'intensité totale, avant d'étendre ces résultats à la mesure de la polarisation linéaire.

Au cours de cette section, nous renvoyons les lecteurs à notre publication reproduite en appendice pour éclaircir toutes définitions non explicitées, ceci

---

<sup>1</sup>Ceci demeure une approximation nécessitant de plus amples validations

afin, bien sûr, d'en alléger substantiellement la lecture.

### Lobe elliptique : des vertus d'une approche perturbative

Pour décrire les observations lors d'une analyse "plein-ciel" du CMB, il est commode de décomposer la fonction réponse de l'instrument, que nous noterons  $B(\theta, \phi)$  dans ce chapitre (adoptant donc une notation simplifiée par rapport à celles introduites dans le chapitre 1), dans la base des harmoniques sphériques  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ , où  $\ell$  désigne l'ordre multipolaire. Cette base permet naturellement de décrire plus aisément la convolution impliquée par toute observation. Une fois ce développement effectué, considérant uniquement avec des expériences à haute résolution, il sera possible de considérer la limite des petits angles :  $\theta \ll 1$  et  $\ell \gg 1$ .

Nous définissons donc les coefficients  $b_{\ell m}$  de cette décomposition par

$$b_{\ell m} \equiv \int d\Omega B(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi). \quad (4.1)$$

Considérant le cas d'un lobe primaire elliptique, nous définissons

$$B(\theta, \phi) = B_0 \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_b^2} f(\phi)\right] \quad (4.2-a)$$

où  $f(\phi) \equiv 1 - \chi \cos^2(\phi)$  décrit l'écart à une lobe Gaussien (circulaire), où nous définissons l'ellipticité comme le paramètre

$$\chi \equiv 1 - (\sigma/\sigma_a)^2 \quad (4.3)$$

prenant des valeurs  $0 \leq \chi < 1$ , où  $\sigma_a$  et  $\sigma$  dénotent respectivement les dimensions des grand et petit axes et où  $B_0 = [\int d\Omega B(\theta, \phi)]^{-1}$  désigne la normalisation du lobe. Notons que cette description d'une ellipse est implicitement dans une approximation plane. Avec ces notations, une fenêtre circulaire et Gaussienne correspond au cas  $\chi = 0$ .

L'idée première de notre approche consiste à trouver une expression analytique pour  $b_{\ell m}$ , défini en Eq. 4.1, en effectuant un développement de Taylor d'un lobe elliptique (Eq.4.2) autour d'un cas symétrique ( $\chi = 0$ ). Cette expansion est générale et valide pour tout  $\chi$ .

Ce développement perturbatif peut s'écrire de la sorte pour  $B(\theta, \phi)$ ,

$$\begin{aligned} B(\theta, \phi) &= B_0 \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \chi \cos^2(\phi - \omega)\right] \\ &\approx B_0 \left[ B(\theta) + \chi \frac{\theta^2}{2\sigma^2} B(\theta) \cos^2(\phi - \omega) \right] + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (4.4-a)$$

et entraîne une expression analogue dans l'espace harmonique :

$$b_{\ell m} = \sum_n b_{\ell m}^{(n)} \frac{\chi^n}{n!} = b_{\ell m}^{(0)} + b_{\ell m}^{(1)} \chi + \mathcal{O}(\chi^2). \quad (4.5)$$

Le point clef de cette approche réside dans le fait que le terme d'ordre  $n$  de la transformée en harmonique sphérique puisse être intégré exactement dans l'approximation des petits angles. *Seuls les modes pairs en  $m$  sont non nuls* et s'écrivent :

$$b_{\ell m}^{(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n-m/2}} N_{\ell-m} \frac{2n!}{(n+m/2)!} \sigma^{2+m} e^{-z} L_{n-m/2}^{(m)}(z) \quad (4.6)$$

où  $z = \ell^2 \sigma^2 / 2$ ,  $N_{\ell m}$  est une normalisation propre aux harmoniques sphériques et où  $L_{\nu}^{(\alpha)}(z)$  est un polynôme de Laguerre d'ordre  $\nu$  et de paramètre  $\alpha$ .

Ceci nous permet d'aboutir au résultat clef suivant :

$$b_{\ell m} = \sigma^m N_{\ell m}^I e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m} L_{\nu}^{(m)}(z) \chi^{\nu+m/2} \quad (4.7)$$

où l'on a défini  $N_{\ell m}^I = N_{\ell-m} / \bar{B}_0$ ,  $\bar{B}_0 = B_0 / (2\pi\sigma^2)$ , et

$$\gamma_{\nu, m} = (2\nu + m)! / (2^{2\nu+3m/2} (\nu + m/2)! (\nu + m)!). \quad (4.8)$$

Le cas circulaire Gaussien est retrouvé pour  $\chi = 0$ , pour lequel seulement le terme  $m = 0$  est non-nul soit  $b_{\ell m} = N_{\ell 0} \exp[-\ell^2 \sigma^2 / 2] \delta_{m,0}$ . Par ailleurs, l'usage des règles de combinaison des harmoniques sphériques entraîne  $b_{\ell -m} = b_{\ell m}$ , ce qui nous permet par la suite de ne considérer que le cas  $m > 0$ .

## Discussion et prescriptions pour l'intensité totale

Ce résultat amène les remarques suivantes :

- Pour des expériences à haute résolution,  $\sigma \ll 1$  rad, la transformée en harmonique sphérique de cette fonction réponse elliptique est dominée par la contribution circulaire du mode  $m = 0$ . Notons, toutefois, que ce terme  $m = 0$  ne correspond plus à un lobe circulaire Gaussien du fait des termes correctifs en  $\chi$ .
- A l'ordre dominant en  $\chi$  (correspondant à  $\nu = 0$  dans l'expression 4.7), les modes  $m$  non nuls sont très atténués

$$b_{\ell m} \simeq \gamma_{0, m} \chi^{m/2} (\sigma\ell)^m N_{\ell 0} e^{-\ell^2 \sigma^2 / 2} \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (4.9)$$

Si bien que leur contribution est non-négligeable par rapport au mode circulaire ( $m = 0$ ) lorsque  $\sigma^2 \ell^2 \approx 1/\chi$ , ce qui est après le pic de la fonction fenêtre à  $\sigma^2 \ell_{peak}^2 \simeq (1 - \chi/4)/2$ . Ainsi les corrections des termes non-circulaires (grand  $m$ ) piquent à un  $\ell$  croissant avec  $m$ . Ce résultat explique les résultats, numériques, récents de [15].

Si nous calculons numériquement chacun de ces termes nous trouvons tout d'abord que la convergence est très rapide. Aussi un très petit nombre de termes

est requis afin d'obtenir une bonne description de cette fonction fenêtre. Ceci rend ces calculs plus facilement utilisables.

De manière à quantifier cette convergence et surtout à en déduire des prescriptions pratiques concernant le nombre de termes requis pour une expérience donnée, nous comparons cette expansion à une intégration numérique exacte et déterminons le nombre de termes nécessaires afin d'obtenir une description exacte à 1 % près de la fonction fenêtre pour  $\ell \leq \ell_{max} = 5\ell_{peak}$ . Ces nombres sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

$\chi$	$(\sigma_a/\sigma)$	0.17(1.1)	0.30(1.2)	0.40(1.3)	0.49(1.4)	0.55(1.5)
$\theta_{FWHM}$	$\ell_{peak}$	548	531	519	509	502
10'	$n$	2	3	4	6	6
$\theta_{FWHM}$	$\ell_{peak}$	1097	1063	1039	1020	1005
5'	$n$	2	3	4	6	7

**Table 3.1** Dans cette table nous avons placé le nombre de termes  $n$  de l'expansion en  $\chi$  requis pour obtenir une précision plus grande que 1% jusqu'à  $\ell_{max} = 5\ell_{peak}$ .

Les nombres présentés dans ce tableau, en plus de témoigner de la rapidité de convergence de l'expansion, amènent une autre requête. En effet, comme nous l'avons vu, la correction à l'ordre  $n$  du mode  $m = 0$  est du même ordre de grandeur que l'ordre dominant du mode  $m = n$  avec  $m$  pair. Aussi, si l'on veut être cohérent, *l'ordre de la correction la plus élevé en  $\chi$  du mode  $m = 0$  (mode circulaire) doit correspondre au plus haut mode  $m$  (mode non-circulaire) inclus dans l'expansion de la fonction fenêtre  $b_{\ell m}$* . Par exemple, pour modéliser cette fonction fenêtre avec une précision de 1% pour  $\ell \leq \ell_{max} = 5\ell_{peak}$  (ce qui est bien souvent trop important) il convient pour un lobe avec  $\theta_{FWHM} = 10'$  d'inclure le mode  $m = 2$  pour  $\chi = 0.17$  et  $0.30$ , les modes  $m = 2, 4$  pour  $\chi = 0.40$ , etc. . .

Ces contraintes sur la cohérence nécessaire à un traitement précis de l'effet du lobe instrumental sont particulièrement explicitées par cette approche perturbative et vont à l'encontre de certaines pratiques ou idées décrites jusqu'à maintenant.

## Généralisation à la mesure de la polarisation linéaire

Ces effets de lobe instrumental sont également importants pour la mesure de la polarisation, peut-être même plus étant donné qu'une différence entre deux voies est nécessaire.

Cette mesure en elle-même semble particulièrement délicate puisque le CMB, s'il est d'origine cosmologique, doit être *polarisé linéairement* à hauteur de 10% seulement par la diffusion Thomson des photons sur les électrons chaud de la surface de dernière diffusion [17, 18, 19, 20]. Mais, alors que la détection d'une composante polarisée du CMB échappe encore à la sensibilité des expériences

actuelles<sup>2</sup>, il est bien connu qu’une telle mesure permettrait de lever des dégénérescences entre certains paramètres cosmologiques [21, 22] et constituerait un test très fort des théories sous-jacentes en détectant, par exemple, un fond diffus d’ondes gravitationnelles inflationnaires [23, 24]. Plus précisément, l’amplitude de la composante “C” (pour “Curl” en anglais, voir ci-dessous) de la polarisation linéaire due aux ondes gravitationnelles générées au moment de l’inflation est proportionnelle au carré de l’énergie caractéristique de l’inflation (encore indéterminé). Si une telle énergie existait, et si elle avait un lien avec l’échelle de grande unification (GUT), ou avec une physique à l’échelle de Planck, ce qui est supputé par de nombreux théoriciens de l’Univers primordial, alors naturellement, une telle mesure serait d’une richesse inouïe.

Dans cette brève section, par refus d’une trop grande technicité, nous glissons sur certaines subtilités introduites par la polarisation (nous renvoyons tout lecteur intéressé à notre publication [3], reproduite en annexe, où les notations et conventions sont introduites et soigneusement comparées à celles utilisées dans la littérature).

Pour notre plus grande satisfaction, il est possible de traiter le cas des lobes instrumentaux linéairement polarisés de manière analogue à celui de l’intensité totale<sup>3</sup>. Les radiations polarisées linéairement peuvent être décrites en fonction des paramètres de Stokes  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{U}$  (la polarisation circulaire étant nulle,  $\tilde{V} = 0$ ), qui, pour une onde plane, sont simplement reliés aux amplitudes du champ électrique de l’onde, dans deux directions orthogonales à la direction de propagation [25, 26].

Suivant les notations standards [27, 28, 23, 29], les paramètres de Stokes du lobe instrumental sont décomposés dans la base des harmoniques sphériques de spin 2,  $_{\pm 2} Y_{\ell m}$ , de la manière suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{Q} \pm i\tilde{U}) = \sum_{\ell m} (b_{\ell m}^G \mp i b_{\ell m}^C) {}_{\mp 2} Y_{\ell m} \quad (4.10)$$

d’où l’on déduit l’expression suivante des modes G (“gradient”) et C (“rotationnel” de l’anglais “curl”)

$$\begin{aligned} b_{\ell m}^G &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2 Y_{\ell m}^* + (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2} Y_{\ell m}^* \right] \\ b_{\ell m}^C &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2 Y_{\ell m}^* - (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2} Y_{\ell m}^* \right]. \end{aligned} \quad (4.11-a)$$

Utilisant les propriétés de parité des harmoniques sphériques, nous pouvons montrer facilement que

$$b_{\ell m}^C = i b_{\ell m}^G, \quad b_{\ell -m}^C = -i b_{\ell -m}^G, \quad (4.12-a)$$

<sup>2</sup>Ce qui ne devrait plus être le cas bientôt si les expériences à venir tels BOOMERanG, MAXIPOL, POLAR, CBI, Polatron et d’autres tiennent leurs promesses et si le CMB est, bien sûr, polarisé au niveau attendu.

<sup>3</sup>Ceci peut-être vu explicitement en remarquant que pour un lobe polarisé linéairement,  $\tilde{Q} \pm i\tilde{U} = -B(\theta, \phi) \exp(\pm 2i\phi)$ . Nous avons donc un décalage de phase dans l’espace réel qui se traduira par un décalage de mode dans l’espace harmonique, comme nous le verrons plus-tard.

si bien que la fonction fenêtre est complètement déterminée par un seul mode. À titre d'exemple, nous nous limiterons par la suite au mode  $G$ .

Notons brièvement que cette décomposition en mode “G” et “C” est équivalente à une décomposition en mode “E” et “B” appliquée dans l'étude des distorsions gravitationnelles, où cette décomposition se révèle utile, car dans le régime des lentilles faibles, le champ de cisaillement est un champ de spin 2<sup>4</sup>.

$$b_{\ell m}^E = -\sqrt{2} b_{\ell m}^G ; \quad b_{\ell m}^B = -\sqrt{2} b_{\ell m}^C . \quad (4.13)$$

Notons que cette décomposition en mode G-C (ou E-B) vise à transformer les paramètres de Stokes, qui sont des quantités de spin 2 en un scalaire (E) et un pseudo-scalaire (B).

En analogie directe avec le calcul effectué dans la section précédente, nous pouvons écrire

$$b_{\ell m}^G = \sum_n b_{\ell m}^{G(n)} \frac{\chi^n}{n!} = b_{\ell m}^{G(0)} + b_{\ell m}^{G(1)} \chi + \mathcal{O}(\chi^2) . \quad (4.14)$$

Cette expansion peut, cette fois encore, être intégrée exactement à tout ordre et l'on obtient,

$$b_{\ell m}^G = \sigma^{m-2} N_{\ell m}^G e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m-2} L_{\nu}^{(m-2)}(z) \chi^{\nu+m/2-1} \quad (4.15)$$

où nous avons défini  $N_{\ell m}^G = -\ell^{2m} M_{\ell m} / (4\sqrt{2}\bar{B}_0)$ , et où les coefficients  $\gamma_{\nu, m-2}$  sont inchangés par rapport à la définition de Eq (4.6). Le facteur  $M_{\ell m}$  est une normalisation propre aux harmoniques sphériques de spin 2.

Aussi, nous arrivons au résultat satisfaisant que, mis à part un décalage  $m \rightarrow m-2$ , les résultats précédents sont conservés. Ce simple fait rend naturellement compte de la nature spinnorielle (spin = 2) du champ de polarisation.

Ainsi, cette fois, le mode  $m = 2$  domine la transformée en harmonique sphérique du lobe instrumental linéairement polarisé. Par ailleurs, nous trouvons que les modes  $m > 2$  sont supprimés par rapport au mode  $m = 2$  en analogie complète avec la situation précédente (cas de l'intensité totale) ; si bien qu'un traitement cohérent des effets d'un lobe elliptique nécessite, si le terme  $m = 2$  est développé à l'ordre  $n$ , l'inclusion des modes  $m < n + 2$  avec  $m$  pair.

Les mêmes propriétés de convergence sont naturellement observées pour ce développement.

## 4.2 Applications et discussions

Afin d'illustrer les calculs de “fonctions fenêtre” précédemment effectués, nous considérons maintenant l'ensemble des statistiques à deux points spécifiques à cette radiation linéairement polarisée. Notons que, si nous assimilons

<sup>4</sup>Voir [27, 30] pour deux introductions dans ces deux contextes différents et [31] pour une mesure récente de ces modes du champ de cisaillement



les observables  $(T, Q, U)$  de cette radiation incidente à des champs aléatoire Gaussien, alors leur description sera complète, au sens où leur distribution (corrélée) sera complètement définie (voir ). Nous étudierons ensuite l'influence d'un lobe instrumental elliptique sur l'évaluation des  $\mathcal{C}_\ell$ , où plutôt sur l'estimation de leurs erreurs.

### Matrice de corrélation polarisée

Acceptant cette hypothèse de Gaussianité, la distribution de ces observables est complètement caractérisée par les 6 (auto-)corrélations entre  $T$ ,  $Q$ , et  $U$ . Suivant [32, 23] et faisant usage des symétries de parité qui imposent  $\langle T_1 U_2 \rangle = \langle Q_1 U_2 \rangle = 0$  où les indices  $_1$  et  $_2$  renvoient à deux directions  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$  sur le ciel, cette distribution est fixée par

$$\mathbf{M}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) \equiv \begin{pmatrix} \langle T_1 T_2 \rangle & \langle T_1 Q_2 \rangle & 0 \\ \langle T_1 Q_2 \rangle & \langle Q_1 Q_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle U_1 U_2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Les entrées de cette matrice de corrélation sont données par

$$\begin{aligned} \langle P_1 P_2 \rangle &= \langle P_{eff}^*(\hat{n}_1, \omega_1) P_{eff}(\hat{n}_2, \omega_2) \rangle ; \\ P_{eff}(\hat{n}, \omega) &= \int d\Omega D(\phi, \theta, \omega) \tilde{P}^* P \end{aligned} \quad (4.17-a)$$

où  $P_{eff}$  est le résultat d'une convolution du lobe polarisé linéairement  $\tilde{P} = \tilde{T}, \tilde{Q}, \tilde{U}$  avec le ciel et  $P = T, Q, U$ .

L'opérateur de rotation  $D(\phi, \theta, \omega)$  agit sur le lobe de telle sorte qu'il prenne toutes les orientations possibles par rapport à un repère fixe sur le ciel [33, 29]. Ces trois angles pourraient, par exemple, être les trois angles d'Euler.

Notons que dans ces notations, déterminer *une stratégie d'observation du ciel* revient à fixer la dépendance temporelle des 3 angles  $(\phi(t), \theta(t), \text{ et } \omega(t))$ . Alors,  $\hat{n} = \hat{n}(\theta(t), \phi(t))$  donne la direction de pointage à l'instant  $t$  et  $\omega(t)$  est l'angle de rotation du lobe autour de la direction de pointage. Par la suite, par commodité, nous considérons comme implicite la dépendance en temps.

En toute généralité, on peut donc écrire,

$$T_{eff} = \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^* a_{\ell m} \quad (4.18)$$

$$Q_{eff} = 2 \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^{G*} a_{\ell m}^G \quad (4.19)$$

$$U_{eff} = 2 \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^{G*} a_{\ell m}^C \quad (4.20)$$

où nous avons défini,  $a_{\ell m}^G = (a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m})/2\sqrt{2}$  et  $ia_{\ell m}^C = (a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m})/2\sqrt{2}$ .

Faisant usage des propriétés de symétrie des matrices de rotation et de leurs théorèmes d'addition, nous pouvons facilement calculer, par exemple  $\langle T_1 T_2 \rangle$  et  $\langle T_1 Q_2 \rangle$  :

$$\langle T_1 T_2 \rangle = \sum_{\ell} b_{\ell}^{TT} \mathcal{C}_{\ell}^T \quad (4.21)$$

$$\langle T_1 Q_2 \rangle = 2 \sum_{\ell} b_{\ell}^{TG} \mathcal{C}_{\ell}^{TG} \quad (4.22)$$

où nous avons utilisé les définitions,

$$\langle a_{\ell m}^{P*} a_{\ell' m'}^P \rangle = \mathcal{C}_{\ell}^P \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad , \quad P = T, G, C \quad (4.23)$$

et où nous avons défini la “fonction fenêtre à deux points”,

$$b_{\ell}^{P P'} = \sum_{M M'} D_{M' M}^{\ell} b_{\ell M}^{P*} b_{\ell M'}^{P'} \quad ; \quad P = T, G. \quad (4.24)$$

Afin d'illustrer plus avant ces calculs, nous considérons le cas d'un lobe faiblement elliptique ( $\chi \ll 1$ ), de telle sorte qu'une correction au lobe Gaussien au premier ordre en  $\chi$  soit suffisante. Dans ce cas, nous pouvons développer aisément de manière cohérente au premier ordre.

À cette fin, nous développons tout d'abord la fonction fenêtre (Eq. 4.24) à deux points,

$$b_{\ell}^{P P'} = D_{00}^{\ell}(\beta) b_{\ell 0}^P b_{\ell 0}^{P'} + D_{02}^{\ell}(\beta) b_{\ell 0}^P b_{\ell 2}^{P'} + \dots \quad (4.25-a)$$

Aussi, en remplaçant dans les équations 4.21 et 4.22, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle T_1 T_2 \rangle &= \sum_{\ell} C_{\ell}^T \left[ D_{00}^{\ell} + \frac{\chi}{2} \ell^2 \sigma^2 (D_{02}^{\ell} - D_{00}^{\ell}) \right] \\ &\times \left( \frac{2\ell+1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (4.26-a)$$

$$\begin{aligned} - \langle T_1 Q_2 \rangle &= \sqrt{2} \sum_{\ell} C_{\ell}^{TG} \left[ D_{02}^{\ell} + \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 (D_{04}^{\ell} + D_{22}^{\ell} - 4D_{02}^{\ell}) \right] \\ &\times \left( \frac{2\ell+1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (4.27-a)$$

Les différents termes de  $\langle T_1 T_2 \rangle$  et  $\langle T_1 Q_2 \rangle$  sont tracés sur la Fig. 4.1, pour le cas où  $\mathcal{C}_{\ell} = \text{constante}$ , autrement dit, nous traçons les fonctions de (auto-)corrélation du lobe seul. Dans ce cas, on a supposé, par souci de simplification, que le lobe balayait le ciel le long de lignes d'iso-latitude (*i.e.*  $\alpha = \gamma = 0$ ) avec une orientation constante. Cette simplification peut avoir une certaine réalité dans le sens où des expériences observant le ciel avec des directions de balayage diverses ont tendance à diminuer l'impact de l'asymétrie du lobe instrumental.

De fait, nous constatons que la correction linéaire en  $\chi$  introduit une anti-corrélation pour des pixels séparés par un angle  $\theta$  tel que  $\theta < \sigma_a$ . Ceci rend naturellement compte du lissage du lobe à cette échelle tendant à homogénéiser ces pixels. Pour une échelle supérieure, le lissage du lobe instrumental augmente les corrélations entre pixels, corrélations qui décroissent toutefois avec  $\theta$  comme l'on s'y attend. L'évolution de la fonction de corrélation  $\langle TQ \rangle$  et l'effet de l'ellipticité sont analogues à ceux de la température  $\langle TT \rangle$ .

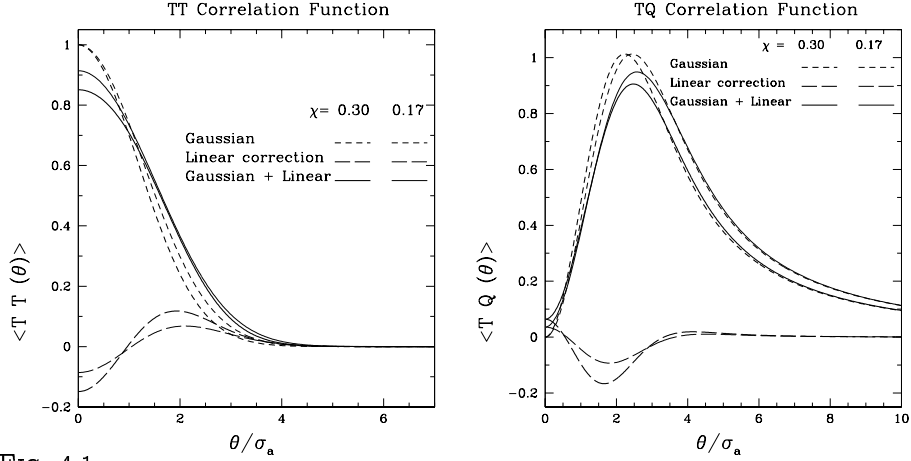


FIG. 4.1

Fonction de corrélation Température-Température (gauche) et Température - Q Polarisation pour un lobe faiblement elliptique. Un spectre de puissance plat ( $\mathcal{C}_\ell = \text{constant}$ ) est considéré. Les lignes en pointillé court correspondent aux fonctions de corrélation pour un lobe circulaire Gaussien. Les lignes en pointillé long correspondent à la correction linéaire de l'ellipticité en supposant que le lobe observe le ciel sur des lignes de latitude constante avec une orientation constante dans le ciel. Les lignes pleines représentent les fonctions de corrélations totales (Gaussien + correction linéaire). Les lignes en gras supposent  $\chi = 0.3(\sigma_a/\sigma = 1.2)$  alors que la ligne fine correspond à  $\chi = 0.17(\sigma_a/\sigma = 1.1)$ .

### Covariance des spectres de puissance

Dans cette section, nous dériverons suivant [34] la covariance estimée des  $\mathcal{C}_\ell$  en présence d'un bruit homogène et non-corrélé. De cette manière, on peut évaluer l'influence de l'ellipticité du lobe instrumental sur l'estimation des erreurs de mesure du spectre de puissance.

La covariance du spectre de puissance pour la température  $T$  peut s'exprimer facilement pour le mode circulaire ( $m = 0$ ) de la fonction fenêtre :

$$\Delta(\mathcal{C}_\ell^T) = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)\Delta\ell f_{\text{ciel}}}} \left( \mathcal{C}_\ell^T + w^{-1} (b_{\ell 0})^{-2} \right) \quad (4.28)$$

On reconnaît naturellement la somme d'un terme rendant compte de la variance cosmique (une erreur purement liée la finitude de l'échantillon) et d'un terme lié au bruit, quantifié par le poids par unité d'angle solide,  $w \equiv (\sigma_{pix}^2 \omega_{pix})^{-1}$ . Le bruit par pixel  $\sigma_{pix} = s/\sqrt{t_{pix}}$  dépend de la sensibilité du détecteur,  $s$ , et du temps d'observation par pixel,  $t_{pix}$ . L'angle solide est  $\omega_{pix} = \theta_{\text{FWHM}} \times \theta_{\text{FWHM}}$ .

$f_{ciel}$  dénote la fraction du ciel observé.

De manière analogue, on obtient pour la polarisation linéaire, en ne considérant que le mode dominant ( $m = \pm 2$ ) [23, 35],

$$\Delta(\mathcal{C}_\ell^P) = \sqrt{\frac{2}{(2\ell+1)\Delta\ell f_{ciel}}} \left( \mathcal{C}_\ell^P + w^{-1} (2b_{\ell 2}^G)^{-2} \right) \quad (4.29)$$

où  $P = G, C$ , et pour le spectre croisé

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{C}_\ell^{TG}) &= \sqrt{\frac{1}{(2\ell+1)\Delta\ell f_{ciel}}} \left[ (\mathcal{C}_\ell^{TG})^2 + \left( \mathcal{C}_\ell^T + w^{-1} (b_{\ell 0}^T)^{-2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( \mathcal{C}_\ell^G + w^{-1} (2b_{\ell 2}^G)^{-2} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.30-a)$$

Ces résultats sont généraux mais n'incluent que le mode  $m$  dominant, *i.e.*  $m = 0$  ou  $m = \pm 2$ , de l'expansion de la fonction fenêtre. En toute rigueur, il faudrait inclure les autres modes  $m$  et calculer la convolution impliquant tous les  $a_{\ell m}$  du ciel, d'où l'on pourrait déduire les erreurs. Ceci ne peut-être fait que numériquement pour des situations particulières. Toutefois, de telles simulations ont été effectuées et suggèrent que le mode dominant azimuthalement symétrique permet une très bonne mesure des  $\mathcal{C}_\ell$ , ce qui signifie que les autres modes sont négligeables [1].

Sur la figure 4.2 nous avons tracé, pour quelques expériences contemporaines (MAXIMA, BOOMERanG, ARCHEOPS), et pour PLANCK, une évaluation de ces erreurs pour un lobe Gaussien (de rms  $\sigma$ , ligne pointillée court), pour une fenêtre elliptique ( $m = 0$ , ligne solide) et pour une Gaussienne effective (de rms  $\sigma_a \sigma$ , ligne pointillée long). Notons tout d'abord que les principales différences dans l'évolution générale de ces erreurs sont dues aux couvertures de ciel et aux sensibilités distinctes. Relevons également que les chiffres utilisés correspondent à *une seule voie* et qu'une moyenne de ces variances sur des intervalles  $\Delta\ell = 75$  est effectuée, *i.e.* ces barres d'erreurs à un sigma sont en fait celles de bandes de largeur  $\Delta\ell = 75$ .

Nous constatons que considérer un lobe Gaussien conduit nécessairement à une sous-estimation des erreurs à grand  $l$ . Néanmoins, une bonne évaluation de ces erreurs est fournie par la Gaussienne effective.

## Discussion des hypothèses

Dans cette section, nous avons proposé une modélisation analytique des effets systématiques du lobe instrumental dans le cas d'un lobe elliptique. Cette modélisation est basée sur un développement perturbatif autour d'un lobe circulaire Gaussien. Nous avons montré qu'un tel lobe pouvait introduire des erreurs significatives dans l'évaluation des erreurs lors de la mesure des  $\mathcal{C}_\ell$ , et, de manière plus générale, qu'un traitement cohérent de ces effets requiert l'incorporation de plusieurs modes, *i.e.* autres que les modes azimuthalement symétriques.

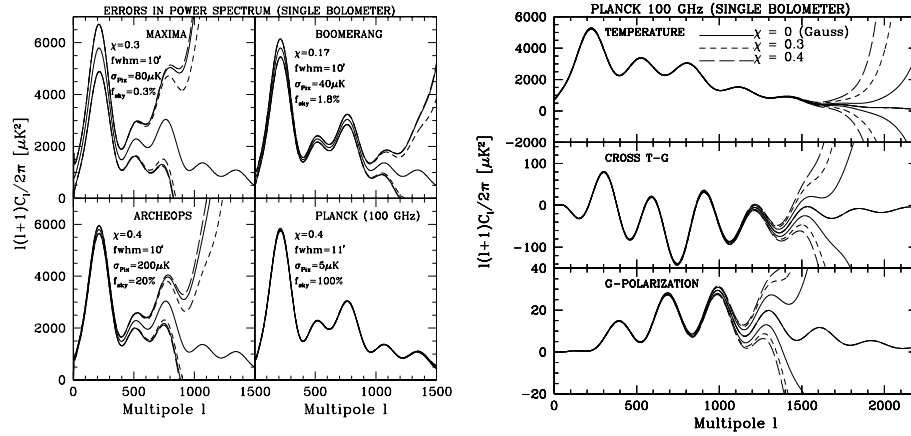


FIG. 4.2

Erreurs lors de l'évaluation du spectre de puissance pour des expériences futures et à venir. Figure de gauche. Nous avons supposé un spectre sous-jacent de type  $\Lambda$ CDM et considérons une mesure de la température seulement. Les paires de lignes (au-dessus et au-dessous de la ligne moyenne) correspondent à un lobe Gaussien (de rms  $\sigma$ , ligne en pointillé court), à un lobe elliptique ( $m = 0$ , ligne continue) et à un lobe Gaussien effectif (de rms  $\sigma_a \sigma$ , ligne en pointillé long). Dans tous les cas, une moyenne sur des intervalles  $\Delta\ell = 75$  est effectuée. Figure de droite. Erreurs pour une voie de PLANCK à 100 GHz. Cette fois, à partir du même modèle sous-jacent, la ligne continue correspond aux erreurs calculées en supposant un lobe Gaussien alors que les lignes pointillées correspondent à des lobes elliptiques de différentes ellipticités  $\chi$ . Le panneau du haut considère les erreurs lors d'une mesure de la température alors que le panneau du milieu considère la mesure de la corrélation croisée  $T - G$  et, celui du bas, de la composante  $G$  seule. Notons que les barres d'erreurs d'une éventuelle polarisation  $C$  "s'envoleraient" pour  $\ell \sim 500$ .

Formellement, la seule hypothèse employée concerne l'approximation des petits angles pour la description du lobe (mais pas du ciel sinon un simple traitement en espace de Fourier (plat) serait suffisant), laquelle ne semble pas critiquable pourvu que  $\sigma \ll 1$  et  $\ell \gg 1$ , domaine auquel s'est restreinte notre interprétation.

En pratique, une hypothèse forte tient dans la pertinence d'un lobe elliptique pour décrire un lobe réel qui ne l'est pas exactement. Même si cette hypothèse semble s'approcher grandement de la réalité, il conviendrait pour tout cas particulier d'étudier la validité de cette modélisation et de quantifier la contribution des résidus éventuels.

Une autre hypothèse implicite de ce travail concerne l'identification faite entre le lobe instrumental “temporel”, *i.e.* celui par lequel le ciel est convolé à chaque point de mesure, et le lobe effectif “spatial”, *i.e.* celui rendant compte pour chaque *pixel de la carte* de la multitude des observations de ce pixel, effectuées sous des angles différents. Dès lors que la stratégie d'observation n'est pas triviale, *i.e.* à cercles d'élévation constants, ce lobe spatial effectif ne sera ni elliptique, car plutôt étoilé, ni même homogène, au sens où il différera d'un pixel à l'autre. Aussi, même si des observations répétées sous des angles différents tendent à symétriser le lobe spatial effectif (ce qui est un point très positif de la stratégie de balayage de MAP [36]), traiter ce problème dans toute sa généralité ne semble pas possible analytiquement, et à cette fin, l'expérimentation numérique constitue probablement la voie la plus immédiate.

Pour ce faire, les outils pratiques (simulation et analyse) ne sont pas non plus nécessairement immédiats à implémenter et nous allons les discuter brièvement dans la section suivante.

### 4.3 D'une prise en compte effective de cet effet, à la reconstruction du lobe lointain.

Dans cette section, prenant acte à la fois des conclusions du précédent développement, nous allons tenter de discuter comment ces effets de lobes peuvent être inclus, en pratique, pour les simulations ou l'analyse. Cette section souffrira certainement de son manque de résultats, puisqu'elle révèle des pistes de recherche en cours, mais notre ambition est qu'elle expose une fois encore quelques difficultés pratiques, qui comme tout lecteur des chapitres précédents l'aura deviné, seront liées à la puissance de calcul requise.

#### D'une approche naïve au niveau de la fabrication de cartes...

Nous pouvons tout d'abord comprendre pourquoi le traitement le plus naïf de ce problème n'est pas applicable. Comme nous l'avons vu dans l'introduction à cette partie, le flot temporel s'exprime comme le produit de la convolution du lobe instrumental par le ciel le long de la trajectoire d'observation :

$$d_t = (\pi \star s)_t + n_t . \quad (4.31)$$

Dans le cadre de notre approche itérative à la fabrication de cartes (voir section 2.3), nous avons fait l'hypothèse d'un lobe symétrique. Les différentes orientations lors de l'observation d'un pixel étaient équivalentes, si bien que nous avons pu choisir de reconstruire une carte convolée par le lobe instrumental,  $x$ . L'opérateur  $\pi$  se simplifiait alors énormément, et nous le renomons  $A$ .  $A$  ne contenait qu'un seul élément non nul par ligne, élément égal à 1. À chaque itération nous devons “observer” une carte puis effectuer une “projection”, *i.e.* appliquer  $A$  et  $A^T$ . Si bien que l'application de  $A$  nécessitait de l'ordre de  $\mathcal{N}_t$  opérations. Étant donné les ordres de grandeur typiques de  $\mathcal{N}_t \sim 10^7$ , le coût de

ces opérations était négligeable devant celui de l'application de la transformée de Fourier en  $\mathcal{N}_t \ln \mathcal{N}_t$ .

Imaginons à présent que l'on désire tenir compte d'un lobe non symétrique, dont on décrit l'effet au moyen de la matrice  $A$ . Pour décrire convenablement l'effet de ce lobe principal on introduit une carte de ce lobe contenant  $n_{lobe}$  pixels (les coefficients de cette carte de lobe sont normalisés de telle sorte que leur somme vaille 1). Dès lors, chaque ligne de  $A$  contient simplement ces  $n_{lobe}$  coefficients, ordonnés comme il se doit. Aussi l'application de  $A$  coûte désormais  $n_{lobe}\mathcal{N}_t$  opérations. Une description sensible du lobe contenant environ 100 pixels, nous comprenons immédiatement que l'application de  $A$  devient l'opération limitante de chaque itération, puisque  $n_{lobe}/\ln \mathcal{N}_t \sim 5$  fois plus coûteuse que la transformée de Fourier. Ceci est, certes, encore réalisable mais ralentit considérablement cette opération. A cela s'ajoute nécessairement le calcul (à n'effectuer en principe qu'une seule fois, même si des contraintes de mémoires peuvent pousser vers un recalcul à la volée) et le stockage de  $A$ , calcul nécessitant de l'ordre de  $n_{lobe}\mathcal{N}_t$  opérations et stockage de  $n_{lobe}\mathcal{N}_t$  éléments (si on ne stocke que la partie non-nulle) équivalent donc à plusieurs jeu de données complets ! Remarquons d'hors et déjà qu'une telle approche est simplement impossible pour traiter l'effet du lobe lointain (décrit par  $\mathcal{N}_p$  pixels également), puisque l'observation d'une carte nécessiterait  $\mathcal{N}_p\mathcal{N}_t$  opérations.

En procédant de la sorte, nous n'avons décrit qu'une *implémentation immédiate* de ce problème. Si nécessaire, *i.e.* si ces effets n'étaient pas négligeables, celle-ci pourrait être néanmoins quasiment applicable pour des expériences de type ballon contemporaines pour lesquelles  $\mathcal{N}_p \sim 10^5$  et  $\mathcal{N}_t \sim 10^7$ , même si elles alourdiraient considérablement l'analyse. Dans le cas de PLANCK où, par contre, nous *devons* tenir compte de ces effets (comme nous le démontrerons par la suite), les ordres de grandeur  $\mathcal{N}_p \sim 10^6$  et  $\mathcal{N}_t \sim 10^9$  rendent ces opérations simplement irréalisables. Notons également qu'en présence de bruit, rien n'indique que ce système soit inversible (par exemple  $A^T N^{-1} A$  singulier si bien que des régularisations sont nécessaires (voir ci-dessous)).

Face à ces simples faits, une première réaction consiste à améliorer une telle implémentation dans l'espace réel, en allégeant les opérations précédemment décrites (diminuer astucieusement  $n_{lobe}$ , pré-calculer autant que possible, interpoler certains éléments de  $A$ ...). La seconde réaction qu'un lecteur avisé n'aura pas manqué d'avoir, consiste à remarquer qu'en principe, l'usage du théorème de convolution laisse espérer qu'une telle opération soit effectuée avec un coût nettement moindre dans l'espace de Fourier. Ceci sera effectivement le cas, et se révélera efficient dans certaines situations sans pour autant résoudre complètement notre problème.

### ... à une approche dans l'espace de Fourier : du bon usage du théorème de convolution

Dans la section précédente nous avons décrit, dans l'espace réel (Eq. 4.17) et dans celui des harmoniques sphériques (Eq. 4.18), une mesure instantanée des observables d'une radiation polarisée linéairement. Nous rappellerons ici

l'expression, dans l'espace réel et harmonique, de l'intensité totale  $T$ ,

$$T_{eff}(\hat{n}, \omega) = \int d\Omega D(\phi, \theta, \omega) \tilde{T}^* T \quad (4.32-a)$$

$$= \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^* a_{\ell m} \quad (4.32-b)$$

où  $a_{\ell m}$  désigne la décomposition en harmonique sphérique du ciel,  $T$  [33, 29].

Si l'on considère que la description du lobe  $b_{\ell M}$  et du ciel  $a_{\ell m}$  requiert seulement  $\ell < \ell_{max}$  - ce qui est imposé par la plus haute résolution que le lobe instrumental nous laisse espérer - alors le calcul de  $T_{eff}$  par l'équation 4.32 nécessite  $\mathcal{O}(\ell_{max}^2)$  opérations. Lorsque l'on réalise que le lobe ainsi décrit inclut également le lobe lointain, alors le gain par rapport à l'espace réel est évident, où un tel calcul, lobe lointain inclut, coûterait  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_p^2)$  opérations (typiquement, pour  $\mathcal{N}_p \sim 10^6$ ,  $\ell_{max} \sim 760$  ( $N_{side} = 256$  et  $\theta_{pix} = 13'$ ). Notons que ce calcul n'inclut pas le pre-calcul de  $a_{\ell m}$  et  $b_{\ell m}$  sous-dominant et effectué une unique fois.

Aussi substantiel que soit ce gain, il demeure insuffisant si l'on désire générer une grille de points d'où l'on pourra générer des observations simulées par simple interpolation. Une telle grille, pour être complète, nécessiterait de l'ordre de  $\ell_{max}^3$  points (3 angles d'Euler), soit un coût total de  $\mathcal{O}(\ell_{max}^5)$  opérations. Pour PLANCK, où, d'une part, de nombreuses simulations sont nécessaires et où, d'autre part,  $\ell_{max} = 2048$ , cela demeure irréalisable.

Une solution à ce problème a été proposée pour la classe d'expériences observant le ciel en décrivant des cercles, telle que PLANCK [33]. Elle consiste à utiliser la factorisation de  $D(\phi, \theta, \omega)$  dans Eq. 4.32, rendue possible par cette stratégie de balayage. Brièvement, le ciel couvert par une succession de cercles parcourus indépendamment. Il s'agit donc de dissocier l'observation d'un cercle (une rotation autour d'un axe unique, permettant l'usage de transformée de Fourier rapide) de l'opération de positionnement de ce cercle (commune à tous les points du cercle). Une telle factorisation allège considérablement le coût de la génération de ces observations, ainsi ramené à  $\mathcal{O}(\ell_{max}^4)$  en général et à  $\mathcal{O}(\ell_{max}^3)$ , si l'on considère des expériences où ces cercles figurent eux-mêmes sur un anneau et forment donc un tore. Cette astuce est désormais couramment utilisée dans le cadre des simulations PLANCK.

## Premiers pas vers une déconvolution

Notre contribution a consisté à proposer un algorithme [37], ambitieux mais non encore effectif, qui, partant de cet algorithme de convolution rapide, permettrait de reconstruire à partir des données le lobe lointain, et donc d'évaluer ces effets.

Cette approche est itérative, et suppose la connaissance du lobe primaire principal uniquement. On peut la décrire comme suit :



- Déconvolution des observations par le lobe principal. Les résidus sont attribués à l'effet du lobe lointain
- À partir de ces observations résiduelles, reconstruction d'une carte du lobe lointain.

Formulé ainsi, cet algorithme est en fait une déconvolution “en double aveugle” puisque l'on cherche à reconstruire simultanément une carte du signal et du lobe. Ce problème est classique et intrinsèquement délicat, mais a été résolu dans certaines situations [38].

De manière générique toutefois, en présence de bruit, le système impliqué est non inversible, si bien que des régularisations sont nécessaires. Parmi celles-ci, on peut penser à la positivité du lobe instrumental, à des *a priori* sur la forme du ciel (par exemple, on peut supposer connue la Galaxie observée par le lobe lointain)...

En pratique, cet algorithme nécessite deux parties indépendantes, que nous avons développées, et qui sont en fait les opérations inverses de l'algorithme de convolution rapide évoqué ci-dessus. Ces deux algorithmes permettent, étant donné un ciel observé (convolé) et un lobe, de trouver un ciel déconvolé, ou bien, étant donné un ciel observé et un ciel déconvolé, de trouver un lobe.

Même si ces deux sous-éléments ont été développés, l'algorithme dans son ensemble ne l'est pas encore, puisque les étapes de régularisation sont encore absentes.

# Bibliographie

- [1] J. H. P. Wu, A. Balbi, J. Borrill, P. G. Ferreira, S. Hanany, A. H. Jaffe, A. T. Lee, S. Oh, B. Rabii, P. L. Richards, G. F. Smoot, R. Stompor, and C. D. Winant. Asymmetric Beams in Cosmic Microwave Background Anisotropy Experiments. *ApJSuppl.*, 132 :1–17, January 2001.
- [2] J.-C. Hamilton. Note interne à la collaboration ARCHEOPS.
- [3] Pablito Fosalba, O. Doré, and F.R. Bouchet. Elliptical Beams in CMB Temperature and Polarization Anisotropy Experiments : An Analytic Approach. *Phys. Rev. D* *in press*, 2001.
- [4] C. Burigana, D. Maino, N. Mandolesi, E. Pierpaoli, M. Bersanelli, L. Danese, and M. R. Attolini. Beam distortion effects on anisotropy measurements of the cosmic microwave background. *A&A Suppl*, 130 :551–560, June 1998.
- [5] L. Van Waerbeke, F. Bernardeau, and K. Benabed. Lensing Effect on the Relative Orientation between the Cosmic Microwave Background Ellipticities and the Distant Galaxies. *ApJ*, 540 :14–19, September 2000.
- [6] K. Benabed, F. Bernardeau, and L. Van Waerbeke. CMB B-polarization to map the Large-scale Structures of the Universe. 2000.
- [7] M. Zaldarriaga and U. Seljak. Gravitational Lensing Effect on Cosmic Microwave Background Polarization. *Phys. Rev. D*, 58 :023003, 1998.
- [8] U. Seljak and M. Zaldarriaga. Lensing-induced Cluster Signatures in the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, 538 :57–64, July 2000.
- [9] D. J. Schlegel, D. P. Finkbeiner, and M. Davis. Maps of Dust Infrared Emission for Use in Estimation of Reddening and Cosmic Microwave Background Radiation Foregrounds. *ApJ*, 500 :525+, June 1998.
- [10] C. G. T. Haslam, H. Stoffel, C. J. Salter, and W. E. Wilson. A 408 MHz all-sky continuum survey. II - The atlas of contour maps. *A&A Suppl.*, 47 :1+, January 1982.
- [11] P. de Maagt, A. Polegre, and G. Crone. Straylight evaluation of the carrier configuration. *ESA technical report*, 1998.
- [12] J. Delabrouille. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1998.
- [13] PLANCK Phase A study report, ESA.

- [14] C. Burigana *et al.* . In-flight main beam reconstruction for Planck-LFI. *soumis a A&A*, 2000.
- [15] T. Souradeep and B. Ratra. Window Function for Non-Circular Beam CMB Anisotropy Experiment. 2001.
- [16] N. Mandolesi, M. Bersanelli, C. Burigana, K. M. Górski, E. Hivon, D. Maino, L. Valenziano, F. Villa, and M. White. On the performance of Planck-like telescopes versus mirror aperture. *A&A*, 145 :323–340, August 2000.
- [17] M. J. Rees. Polarization and Spectrum of the Primeval Radiation in an Anisotropic Universe. *ApJ Let.*, 153 :L1–+, July 1968.
- [18] M. M. Basko and A. G. Polnarev. Polarization and Anisotropy of the Primordial Radiation in an Anisotropic Universe. *Soviet Astronomy*, 24 :268+, June 1980.
- [19] N. Kaiser. Small-angle anisotropy of the microwave background radiation in the adiabatic theory. *MNRAS*, 202 :1169–1180, March 1983.
- [20] J. R. Bond and G. Efstathiou. Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter. *ApJ Let.*, 285 :L45–L48, October 1984.
- [21] M. Zaldarriaga, D. N. Spergel, and U. Seljak. Microwave Background Constraints on Cosmological Parameters. *ApJ*, 488 :1+, October 1997.
- [22] D. J. Eisenstein, W. Hu, and M. Tegmark. Cosmic Complementarity : Joint Parameter Estimation from Cosmic Microwave Background Experiments and Redshift Surveys. *ApJ*, 518 :2–23, June 1999.
- [23] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins. Statistics of cosmic microwave background polarization. *Phys. Rev. D*, 55 :7368–7388, June 1997.
- [24] U. Seljak and M. Zaldarriaga. . *Phys. Rev. Let.*, 78 :2054, 1997.
- [25] S. Chandrasekhar. *Radiative transfert*. 1960.
- [26] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, 1998.
- [27] A. Stebbins. *Weak Lensing On the Celestial Sphere*. 1996.
- [28] U. Seljak. Measuring Polarization in the Cosmic Microwave Background. *ApJ*, 482 :6+, June 1997.
- [29] A. Challinor, P. Fosalba, D. Mortlock, M. Ashdown, B. Wandelt, and K. Gorski. All-sky convolution for polarimetry experiments. *Phys. Rev. D*, 62 :123002, 2000.
- [30] M. Zaldarriaga. The nature of the E-B decomposition of CMB polarization. *soumis a Phys. Rev. D*, 2001.
- [31] U.-L. Pen, L. van Waerbeke, and Y. Mellier. Gravity and Non-gravity Modes in the VIRMOS-DESCART Weak Lensing Survey. 2001.
- [32] M. Zaldarriaga. Cosmic Microwave Background Polarization Experiments. *ApJ*, 503 :1+, August 1998.

- [33] B. Wandelt and K. Gorski. Fast convolution on the sphere. *Phys. Rev. D*, 62 :123002, 2000.
- [34] L. Knox. Determination of inflationary observables by cosmic microwave background anisotropy experiments. *Phys. Rev. D*, 52 :4307–4318, October 1995.
- [35] M. Zaldarriaga and U. Seljak. . *Phys. Rev. D*, 55 :1830, 1997.
- [36] G. Hinshaw. In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference “ Mining the sky”*, Garching, 2000.
- [37] O. Doré *et al.* . In *MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference “ Mining the sky”*, Garching, 2000.
- [38] E. Thiébaut and J.-M. Conan. Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution. *JOSAa*, 12(3) :485–492, March 1995.



## Chapitre 5

# Non-Gaussianité et Courbure

Nous l'avons motivé dans l'introduction générale, la mesure de la fonction de corrélation à deux points ou de sa transformée en harmonique sphérique,  $\mathcal{C}_l$ , décrite au chapitre 3, ne peut se passer d'une caractérisation de la nature de la distribution statistique sous-jacente. Plus spécifiquement, étant entendu que, d'une part, les mesures semblent conforter des distributions de nature principalement Gaussiennes, et que, d'autre part, ce fait est "prédit" par les scénarios inflationnaires aujourd'hui favorisés, cette caractérisation a pris la forme d'une *recherche de signatures non-Gaussiennes*.

Pour cette recherche, nous proposons, dans ce chapitre, une statistique originale et sensible. Elle est le fruit d'une collaboration avec Stéphane Colombi et François Bouchet, dont résulte une publication [1] reproduite en annexe 4.

La voie la plus naturelle pour mettre en évidence une telle composante non-Gaussienne consiste à mesurer *les fonctions de corrélations d'ordre  $n$ , supérieur à deux*, ou, de manière équivalente, les cumulants de la distribution. Seule la connaissance de ces fonctions de corrélation permet, en principe, de caractériser complètement une distribution. Cette voie a été grandement explorée et des mesures, pour  $n = 3$ , dans les trois espaces, réel [2, 3], de Fourier [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], ou des coefficients d'ondelettes [11, 12] ont été proposées et appliquées à d'authentiques données, *e.g.* COBE-DMR ou MAXIMA I. Jusqu'à maintenant, toutes les détections de non-Gaussianité ont pu être reliées, de manière plus ou moins explicite, à la présence d'effets systématiques.

Une seconde approche développée dans ce contexte, peut-être essentiellement pour des raisons historiques, est la statistique des extremas, par exemple leur abondance, leur corrélation, etc. [13, 14]. Bien connue analytiquement [15], son utilisation dans le contexte du CMB a été directement dérivée de l'utilisation abondante qui en était faite pour l'étude de la formation des grandes structures. Les pics sont alors particulièrement importants puisque correspondant aux objets sur-denses (galaxies, groupes, amas) que l'on observe [16]. Ces sta-

tistiques ont déjà été appliquées aux données COBE et sont encore développées [17, 18, 19, 20, 21, 13, 14, 22].

Enfin, une famille d'estimateurs statistiques puissants s'intéresse à caractériser la topologie *des ensembles d'excursion*. Ces ensembles contiennent les régions séparées par des "isophotes", et sont donc définis pour un champ aléatoire  $T(\theta)$  par  $A_u(T) = \{\theta \mid T(\theta) \geq u\}$ . L'évolution du nombre d'Euler,  $\chi^{-1}$  (ou de manière équivalente pour nous, le genus,  $G^{-2}$ ) avec le seuil (voir ci-dessous pour une définition) est spécifiée pour un champ Gaussien, ce qui en fait un bon test de Gaussianité et un moyen de mesurer certains paramètres spectraux. Une manière simple de mesurer le nombre d'Euler consiste à utiliser le théorème de Morse. Après classification des points critiques <sup>3</sup> selon leur courbure, *i.e.* maxima, minima ou selle pour une carte 2-D, ce théorème stipule simplement que

$$\chi = n_{\text{maxima}} + n_{\text{minima}} - n_{\text{selle}} \quad (5.1)$$

où  $n_X$  désigne le nombre de point de type X [15, 23, 24, 17, 18, 20]. Notons qu'il est possible d'unifier la description des caractéristiques morphologiques des ensembles d'excursions au moyen des fonctionelles de Minkovski, qui, au nombre de 3 à 2-D, correspondent à la fraction d'aire totale du domaine d'excursion, à la longueur de sa frontière et à sa courbure totale (le genus) [25].

L'estimateur que nous proposons dans ce chapitre, se rapproche de cette dernière classe d'estimateurs. Son idée essentielle consiste à étendre cette classification des points selon leur courbure locale à tous les points, *i.e.* aux points critiques *et* non-critiques, suivant en cela une idée introduite récemment à 3-D pour l'étude de la topologie et des propriétés de percolation de "la toile cosmique" [26]. Par une mesure de la courbure locale (plus précisément du Hessian, matrice des dérivées secondes), nous serons à même de distinguer trois types de points que nous désignerons par "mont", "lac" et "selle". En suivant l'évolution des abondances relatives de ces points (notées  $\mathcal{P}_{\text{mont}}$ ,  $\mathcal{P}_{\text{lac}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{selle}}$ ) pour différents ensembles d'excursion et différentes échelles de lissage, *nous explorerons la corrélation entre courbure et "hauteur"*. Ceci nous permettra d'extraire une signature Gaussienne mathématiquement très bien définie, qui ne dépendra que d'un unique paramètre spectral. Cette signature rendra possible *une mesure quantitative d'un éventuel écart à la Gaussianité*. Ces simples notions sont bien illustrées sur la figure 5.1.

---

<sup>1</sup>La caractéristique d'Euler d'une surface fermée est un *invariant topologique*. Elle permet de classer de manière unique les surfaces fermées modulo l'orientabilité (une surface est fermée si compacte et sans courbe frontière. Par exemple, une sphère est fermée, un disque ne l'est pas). Autrement dit, étant donné le nombre d'Euler et l'orientabilité d'une surface, le type topologique d'une surface est déterminé. Il s'agit donc d'une caractéristique topologique puissante.

<sup>2</sup>Le genus d'un domaine d'excursion dans une surface 2-D mesure, en quelque sorte, le nombre de régions isolées de haute température diminué du nombre de régions isolées de basse température. Plus précisément, le genus peut-être défini comme la courbure totale du domaine d'excursion. Cette dernière définition permet l'usage du théorème de Gauss-Bonnet, qui indique que  $G = 2\pi\chi$ , si les domaines d'excursion sont compacts (en pratique, si ils ne croisent pas les frontières ou si les frontières sont périodiques).

<sup>3</sup>Les points critiques sont définis comme les points où le gradient s'annule :  $\nabla T = 0$ .

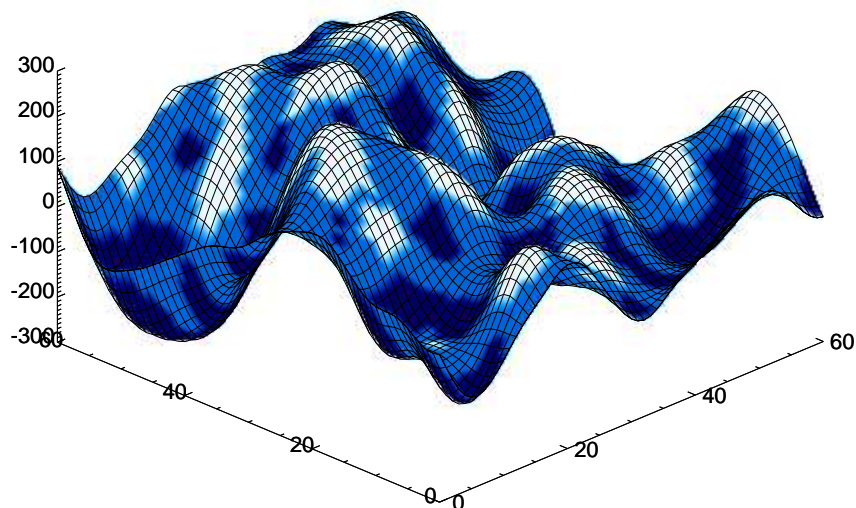


FIG. 5.1

Exemple de points “lac”, “mont” et “selle” pour un champ aléatoire Gaussien lissé par une Gaussienne de largeur 5 pixels (correspondant à la grille projetée sur la surface). Les points sont colorés selon leur type : les points “monts” sont en blanc, les points “lacs” en bleu foncé et les points “selles” en bleu azur. Ainsi, nous voyons que les lacs sont connectés au sommets par des selles. Les points lac et mont sont d’abondance comparable alors que les points selle sont de toute évidence plus abondants. L’évolution de ces abondances en fonction du seuillage est facilement visualisée sur ce graphique : lorsque le seuil augmente, l’abondance des points lac diminue par rapport à celle des points mont qui augmente, comme l’on s’y attend. Dans ce chapitre, nous proposons un estimateur de non-Gaussianité très discriminatif, basé sur une description quantitative de ce cette évolution.

Dans la section 5.1, nous rappellerons quelques faits sur les champs aléatoires Gaussiens et en déduirons quelques prédictions analytiques pour ces abondances que nous comparerons à des premières mesures sur des cartes simulées. Dans un second temps, nous en déduirons, dans la section 5.2, un test de non-Gaussianité, et l’appliquerons à des simulations d’observations, par les satellites MAP ou PLANCK, d’un *modèle hybride* de formation des structures introduit en [27]. Nous discuterons de possibles développements de ce travail dans la section 5.3.



## 5.1 Principes et définitions analytiques

Les champs Gaussiens, outre leur motivation physique certaine (voire introduction générale), ont la très plaisante qualité de permettre des prédictions analytiques de manière relativement simple. Dans notre cas, nous rappellerons brièvement et utiliserons le formalisme présenté en [23, 28] afin d'en extraire quelques nouveaux résultats.

### Quelques éléments sur les champs aléatoires Gaussiens

Soit un champ (2-D) de fluctuations de température  $\delta_T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r})/\bar{T} - 1$  dont la transformée de Fourier est  $\tilde{\delta}_T(\mathbf{k}) \equiv \int d^2\mathbf{k} \delta_T(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  et dont le spectre est donné par  $P(k)$  :

$$\langle \tilde{\delta}_T(\mathbf{k}) \tilde{\delta}_T^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^2 P(k) \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (5.2)$$

où  $\delta_D(\mathbf{k})$  désigne la distribution de Dirac. Nous pouvons définir les moments du spectre de puissance comme

$$\sigma_j^2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} P(k) k^{2j}, \quad (5.3)$$

et le rapport

$$\gamma \equiv \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0 \sigma_2}. \quad (5.4)$$

Notons que  $\sigma_0$  est la déviation standard (rms) du champ de fluctuations  $\delta_T$ . Nous nous plaçons dans l'approximation du “ciel plat”, *i.e.* à grand multipole  $\ell$  et petits angles de séparation. Le spectre de Fourier (plat) est alors relié au spectre de puissance angulaire dans la base des harmoniques sphériques par

$$P(k) \simeq C_\ell \quad \text{and} \quad k \simeq \ell. \quad (5.5)$$

Nous considérons dorénavant les fluctuations normalisées

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta_T(\mathbf{x})}{\sigma_0}. \quad (5.6)$$

À un point donné  $\mathbf{r}$ , on note le gradient du champ  $\nabla \delta \equiv \boldsymbol{\eta}$  et le Hessian  $\zeta_{ij}$ . Cette matrice réelle symétrique peut être diagonalisée en appliquant une rotation d'un angle  $\theta$ . Nous notons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  *l'opposé de ses valeurs propres*, avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . La trace normalisée de la matrice de courbure s'écrit alors

$$x \equiv \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sigma_2}, \quad (5.7)$$

et l'ellipticité  $e$  est définie par

$$e = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\sigma_2 x}. \quad (5.8)$$

Soulignons que dans ces notations,  $x$  et  $e$  doivent avoir le même signe. Si  $\lambda_2 \geq 0$ , alors  $x \geq 0$  et  $0 \leq e \leq 1/2$ . Si  $\lambda_1 \leq 0$ , alors  $x \leq 0$  et  $-1/2 \leq e \leq 0$ . Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont des signes opposés, alors ni  $x$  ni  $e$  ne sont contraints.

Pour un champ aléatoire Gaussien, la fonction de probabilité conjointe des variables  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $x$ ,  $e$  et  $\theta$  est donnée par (équation A1.6 dans [23])

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\delta, \eta, x, e, \theta) d\delta dx de d\theta d^2\eta = \\ e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu^2(x-\gamma\delta)^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \times \\ e^{-\eta^2/\sigma_1^2} \frac{d^2\eta}{\pi\sigma_1^2} e^{-4x^2e^2} 8x^2e de \frac{d\theta}{\pi}, \quad (5.9-a) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\mu \equiv (1 - \gamma^2)^{-1/2}. \quad (5.10)$$

Connaissant cette fonction de probabilité, il est facile de montrer que  $\langle \delta^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \langle \eta^2 \rangle = 1$ , c'est-à-dire que  $\eta$  n'est corrélé ni avec  $\delta$ , ni avec  $x$  ou  $e$ , mais, au contraire, que  $\langle \delta x \rangle = \gamma$ , *i.e. la hauteur en un point est corrélée avec la courbure en ce point*. Ce dernier résultat est d'un intérêt tout particulier pour nous, puisque la dépendance ainsi induite des propriétés du champ avec une éventuelle valeur de seuillage entraîne une signature non-Gaussienne que nous exploiterons par la suite.

### Étude de la courbure locale

Fort de ces bases, nous pouvons maintenant en venir à l'étude de la courbure locale. La courbure locale est définie par le Hessian. En considérant le signe de ses valeurs propres, ( $-\lambda_1$  et  $-\lambda_2$ ) nous pouvons distinguer 3 familles de points :

- les points “mont” pour lesquels les deux valeurs propres sont négatives, *i.e.*  $x \geq 0$  et  $0 \leq e \leq 1/2$ ;
- les points “lac” pour lesquels les deux valeurs propres sont positives, *i.e.*  $x \leq 0$  et  $-1/2 \leq e \leq 0$ ;
- les points “selle” pour lesquels les valeurs propres sont de signes différents.

Ces trois familles contiennent respectivement les maxima, les minima et les points selles.

Notre but est maintenant de calculer la probabilité qu'un point  $(\delta, \eta, x, e, \theta)$  au-delà d'un certain seuil  $\delta_{th}$ , *i.e.* tel que  $\delta \geq \delta_{th}$ , appartienne à une de ces trois classes. Plus précisément, nous désirons calculer les quantités

$$\mathcal{P}_{mont}(\delta_{th}) \equiv \mathcal{P}(0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2 | \delta_{th} \leq \delta) \quad (5.11-a)$$

$$\mathcal{P}_{lac}(\delta_{th}) \equiv \mathcal{P}(0 \geq x, 0 \geq e \geq -1/2 | \delta_{th} \leq \delta) \quad (5.11-b)$$

$$\mathcal{P}_{selle}(\delta_{th}) \equiv 1 - \mathcal{P}_{mont}(\delta_{th}) - \mathcal{P}_{lac}(\delta_{th}). \quad (5.11-c)$$

À partir de ces définitions, nous obtenons, par exemple, relativement simplement,

$$\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}}) = \frac{\int_{\delta_{\text{th}}}^{\infty} \mathcal{N}_{\text{mont}}(\delta, 0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2) d\delta}{\mathcal{P}(\delta_{\text{th}} \leq \delta)}, \quad (5.12)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{mont}}(\delta, 0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2) d\delta = & \\ e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\mu} \left( 1 + \text{Erf}\left(\frac{\gamma\mu\delta}{\sqrt{2}}\right) \right) - \right. & \\ \left. \frac{e^{-\mu^2\gamma^2\delta^2/(2+\mu^2)}}{\sqrt{2+\mu^2}} \left( 1 + \text{Erf}\left(\frac{\gamma\mu^2\delta}{\sqrt{2}\sqrt{2+\mu^2}}\right) \right) \right], & \quad (5.13\text{-a}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P}(\delta_{\text{th}} \leq \delta) = \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\frac{\delta_{\text{th}}}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.14)$$

L'évaluation précise de cette fonction  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}})$  ne peut donc être effectuée analytiquement, hormis dans la limite  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}} = -\infty)$ . La fraction de point mont en absence de tout seuil est en effet

$$\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}} = -\infty) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \simeq 0.2113. \quad (5.15)$$

Par simple raison de symétrie (si l'on considère l'opposé du champ aléatoire, les points monts deviennent des points lacs et vice versa) on a également

$$\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}} = -\infty) = \mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}} = -\infty). \quad (5.16)$$

Ces calculs, illustrés sur la figure 5.2, amènent d'hors et déjà deux remarques importantes qui laissent présager que cette statistique sera très contraignante :

- La fonction  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}})$  (ceci est bien sur également vrai pour  $\mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}})$  et  $\mathcal{P}_{\text{selle}}(\delta_{\text{th}})$ ) ne dépend que d'un seul paramètre spectral,  $\gamma$ ;
- Le nombre total de points lac, selle ou mont ne dépend d'aucun paramètre spectral. Ceci ne serait pas vrai si l'on ne considérait que les points critiques [23, 28].

## Premières confrontation aux mesures

Afin d'illustrer ces résultats plus avant, et de s'assurer de notre habilité à mesurer correctement ces fractions, nous considérons, comme cela sera le cas dans ce chapitre des cartes simulées, carrées, de taille  $12.5 \times 12.5 \text{ deg}^2$  composées chacune de  $512 \times 512$  pixels carrés de largeur  $\theta_{\text{pix}} = 1.5'$ .

Avant de mesurer directement ces fractions, il convient d'insister sur un fait. Le paramètre spectral mesuré sur une carte n'est pas le  $\gamma$  du champ sous-jacent tel que défini dans l'équation 5.4 mais, en fait, celui du champ convolé par le lobe instrumental ou tout autre lobe arbitraire de dimension supérieure.

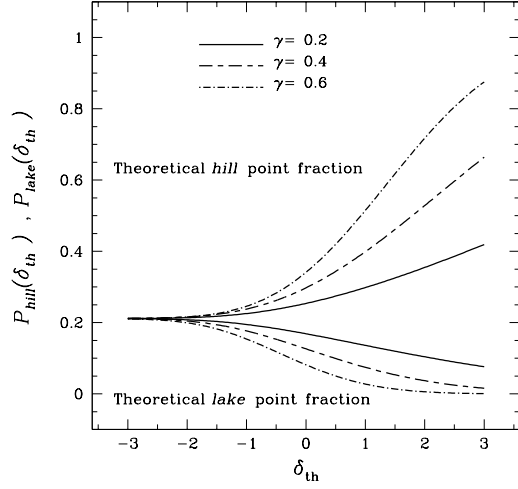


FIG. 5.2

Les fonctions  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}})$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}})$  sont tracées pour un champ Gaussien avec différentes valeurs de  $\gamma$ . La valeur de ces fonctions est indépendante de  $\gamma$  dans la limite  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$ , mais leur évolution avec  $\delta_{\text{th}}$  dépend fortement de  $\gamma$ . Des conclusions similaires valent pour  $\mathcal{P}_{\text{selle}}(\delta_{\text{th}}) = 1 - \mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}}) - \mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}})$ , qui n'a pas été tracée ici par souci de clarté.

Fortuitement, puisque la convolution d'un champ aléatoire Gaussien par une fonction fenêtre arbitraire demeure un champ aléatoire Gaussien (il s'agit d'une opération linéaire), l'effet de lissage apparaîtra simplement par une dépendance de  $\gamma$  en fonction de l'échelle de lissage,  $\sigma_B$ , qui est traitable analytiquement dans le cas d'un lobe instrumental Gaussien [23, 1]. Nous définirons alors un  $\gamma$  effectif comme  $\gamma_{\text{eff}} = \gamma(\sigma_B)$ .

Étant donné une carte lissée à une certaine échelle et seuillée à une certaine valeur de  $\delta_{\text{th}}$ , la simplicité de la mesure tient à la mesure astucieuse du Hessian, inspirée de [26]. Cette astuce consiste à ajuster sur les 8 pixels voisins de celui considéré, une forme quadratique dont les coefficients nous fournissent directement le Hessian, qui peut ensuite être diagonalisé afin de déterminer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette mesure se trouve être à la fois rapide et robuste au bruit, ainsi que nous allons l'illustrer.

Comme premier exemple, nous avons mesuré, à une échelle de lissage  $\sigma_B = 3\theta_{\text{pix}}$ , les fractions  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}})$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}})$  sur 200 réalisations d'une carte simulante des fluctuations de température créées dans un modèle de type standard CDM. Ces 200 réalisations nous permettent d'évaluer sommairement la variance cosmique. Ces résultats sont illustrés sur la figure 5.3 où sont tracées également

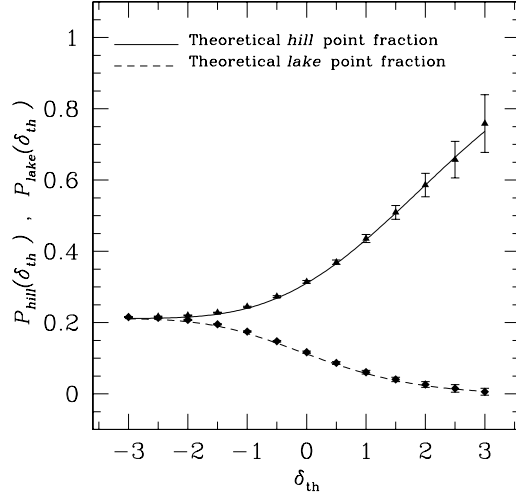


FIG. 5.3

Mesure des fonctions  $\mathcal{P}_{mont}$  et  $\mathcal{P}_{lac}$  sur des cartes d'un champ Gaussien simulées (modèle CDM standard). Les triangles et les losanges désignent respectivement les fractions mesurées de points mont et lac, obtenues en moyennant 200 réalisations d'un champ de taille  $12.5 \times 12.5 \text{ deg}^2$  avec des pixels de largeur  $\theta_{pix} = 1.5'$ . Les barres d'erreur correspondent à la dispersion mesurée sur ces 200 réalisations. Préalablement à ces mesures, chaque image a été lissée par une Gaussienne de variance  $\sigma_B = 3\theta_{pix}$ . Les lignes continues et pointillées correspondent aux valeurs théoriques attendues pour un champ Gaussien avec  $\gamma_{eff} = 0.46$ .

les prédictions pour un champ Gaussien avec  $\gamma_{eff} = 0.46$ <sup>4</sup>.

Cette figure amène immédiatement deux commentaires. Tout d'abord, les "prédictions" analytiques sont en excellent accord avec les mesures. Ensuite, la variance cosmique semble très faible, ce qui laisse présager un fort pouvoir discriminatoire pour le test de Gaussianité déduit de cette mesure. Nous allons l'établir ci-dessous.

Dans un but plus illustratif, nous montrons sur la figure 5.4 une carte seuillée ou non, ainsi que la localisation des différents types de points.

<sup>4</sup>Cette valeur de  $\gamma_{eff}$  a été ajustée de manière à reproduire les données dans ce cas mais pourrait être calculée analytiquement connaissant le spectre de puissance. Nous ne détaillons pas ce point et renvoyons pour plus de détails à notre papier [1]. Il y est montré que, une fois le champ lissé suffisamment pour pouvoir négliger les effets de bord,  $\gamma_{eff}$  est en accord avec ce que de telles calculs fournissent.

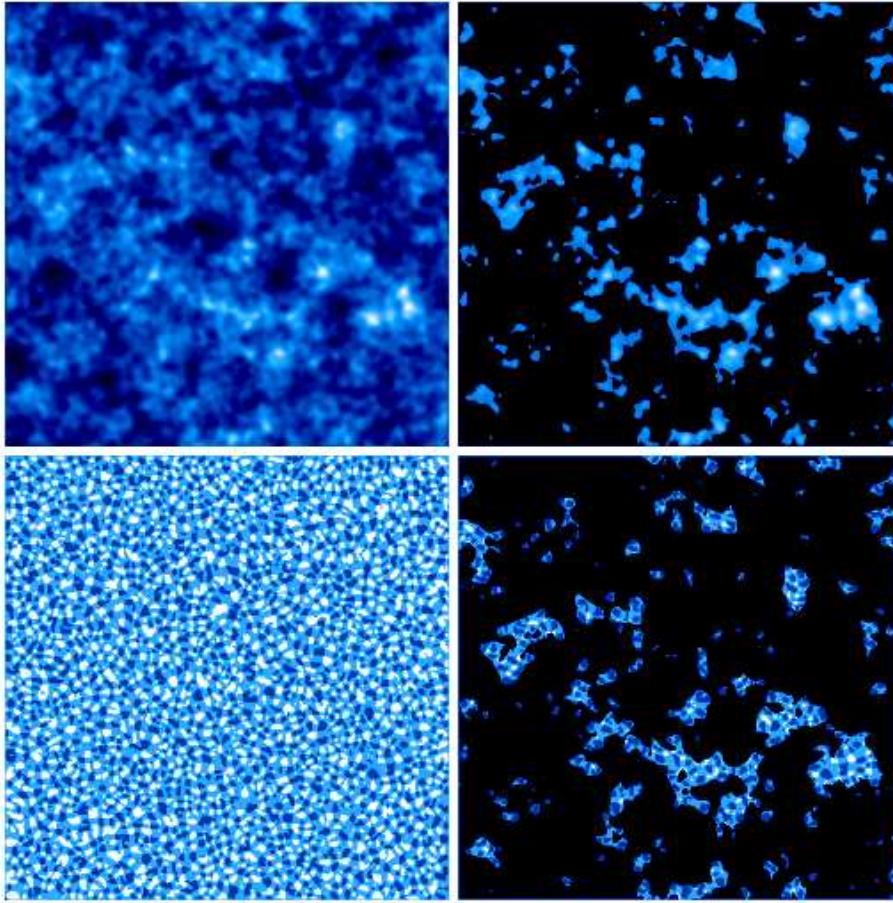


FIG. 5.4

Illustration du protocole de mesure. Considérant une carte de fluctuations de température de type CDM avec  $512^2$  pixels, de taille  $12.5 \text{ deg} \times 12.5 \text{ deg}$  et lissée par une Gaussienne de taille 3 pixels (image en haut à gauche), nous identifions les points mont, selle, et lac, en mesurant leur courbure locale (respectivement en bleu clair, bleu medium et bleu foncé sur l'image en bas à gauche). La fraction d'espace occupée par chacun de ces types est étudiée en fonction du seuillage. Par exemple, le domaine d'excursion correspondant à  $\delta_{\text{th}} = 1$  est montré sur les images de droite, identiques aux images de gauche hormis le fait que seules les régions où  $\delta \geq \delta_{\text{th}}$  sont représentées, le reste étant noirci. Comme nous pouvons le voir, l'abondance relative des points lac est plus faible dans l'image de droite que dans l'image de gauche, alors que la fraction de points mont a augmenté, comme attendu. La mesure de ces fractions pour différentes valeurs de  $\delta_{\text{th}}$  est la base de la statistique défendue dans ce chapitre.

## 5.2 Un estimateur de non-Gaussianité

De la section précédente, nous déduisons que l'évolution des fractions  $\mathcal{P}_{\text{mont}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}$  peut être mesurée adéquatement et se trouve être en bon accord avec les prédictions analytiques. On pourrait montrer également qu'à une échelle de lissage suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bords, la distribution (lorsque l'on considère plusieurs réalisations d'un champ aléatoire Gaussien de caractéristiques spectrales identiques) d'une mesure de fraction  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}}^0)$  à  $\delta_{\text{th}}^0$  donné, est bien approximée par une Gaussienne. Ce dernier point nous autorise à employer une statistique de type  $\chi^2$  pour construire un test de Gaussianité.

### Définition de l'estimateur

Supposons que l'on ait à notre disposition une carte observée de fluctuations de température  $\delta_T$ , sur laquelle on mesure les fractions  $\mathcal{P}_{\text{mont}}(\delta_{\text{th}_i}, \sigma_{\text{B}_i})$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}(\delta_{\text{th}_i}, \sigma_{\text{B}_i})$  pour une famille de valeurs de seuil  $\{\delta_{\text{th}_i}\}$  et d'échelles de lissage  $\{\sigma_{\text{B}_i}\}$ . Si le spectre de puissance de ce champ est connu, nous pouvons en principe définir analytiquement un jeu de valeurs  $\gamma_{\text{eff}}$  pour chaque échelle de lissage  $\{\gamma_{\sigma_{\text{B}_i}}\}$ <sup>5</sup>. Supposant par ailleurs que nos estimateurs de  $\mathcal{P}_{\text{mont}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}$  sont non-biaisés, nous pouvons déduire pour ce jeu de  $\gamma$ , des *prédictions théoriques* pour un champ Gaussien :  $\tilde{\mathcal{P}}_X(\delta_{\text{th}_i}, \sigma_{\text{B}_i}) \equiv \langle \mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}_i}, \sigma_{\text{B}_i}) \rangle$ , où  $X$  dénote désormais "lac" ou "mont".

Pour quantifier la distance entre ces prédictions et les mesures, nous introduisons une statistique  $\chi^2$  standard. Comme, par ailleurs, ces mesures ne peuvent de toute évidence pas être considérées comme indépendantes, nous devons introduire la matrice de covariance

$$C_{\text{II}'} \equiv \langle (\mathcal{P}_{\text{I}} - \tilde{\mathcal{P}}_{\text{I}})(\mathcal{P}_{\text{I}'} - \tilde{\mathcal{P}}_{\text{I}'}), \quad (5.17)$$

où nous avons utilisé la notation raccourcie  $\mathcal{P}_{\text{I}} = \mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}_i}, \sigma_{\text{B}_i})$  et  $\mathcal{P}_{\text{I}'} = \mathcal{P}_{X'}(\delta_{\text{th}_{i'}}, \sigma_{\text{B}_{i'}})$ . Ainsi définie, la statistique

$$\chi^2 \equiv \sum_{\text{II}'} (\mathcal{P}_{\text{I}} - \tilde{\mathcal{P}}_{\text{I}}) (C_{\text{II}'} )^{-1} (\mathcal{P}_{\text{I}'} - \tilde{\mathcal{P}}_{\text{I}'}). \quad (5.18)$$

suivra une distribution du  $\chi^2$ , comme cela sera illustré ci-dessous. En pratique, cette matrice de covariance sera calculée par simple Monte Carlo même si des prédictions analytiques pourraient certainement être effectuées.

### Application aux modèles hybrides

Pour illustrer le pouvoir discriminatif de cette statistique, nous l'appliquons à des simulations d'observations d'un modèle hybride [27], bruitées à un niveau correspondant aux performances nominales des missions PLANCK et MAP.

<sup>5</sup>En pratique, nous avons développé une mesure de  $\gamma$  à chaque échelle un peu plus rapide. Nous ne la détaillerons pas ici et renvoyons pour plus de détails à notre papier [1] reproduit en annexe.

Dans ce modèle, les fluctuations de température sont créées par des fluctuations standards de type CDM mais aussi, partiellement, par des défauts topologiques uni-dimensionnels, *i.e.* des cordes cosmiques. Notre approche pour effectuer ces simulations est simple. Nous n'effectuons qu'une somme pondérée de cartes de fluctuations de type CDM et de cartes de type cordes cosmiques, obtenues par tracé de rayons dans des simulations numériques d'évolutions de réseaux de cordes [29, 30]. Le scénario décrit par une telle simulation suppose implicitement l'existence d'une phase inflationnaire standard dans un Univers où la matière est dominée par la matière froide, suivie d'une transition de phase au cours de laquelle des cordes cosmiques se forment et impriment des fluctuations supplémentaires sur le rayonnement fossile. Nous négligeons par cette rudimentaire simulation toute corrélation entre ces deux phénomènes, ce qui revient à supposer que le réseau de cordes et son évolution dynamique ne sont pas couplés avec celui de la matière froide. Cette approximation est raisonnable dans notre contexte, où l'on ne cherche qu'à tester la capacité de notre estimateur à détecter une faible composante non-Gaussienne, ici due à la présence de cordes cosmiques.

Le bruit,  $n$ , est simplement supposé Gaussien, *blanc et homogène*. Les niveaux respectifs de MAP et PLANCK sont  $12.8 \mu\text{K}/\text{K}$  par pixel de  $0.3 \times 0.3 \text{ deg}^2$  et  $2 \mu\text{K}/\text{K}$  par pixel de  $8' \times 8' \text{ deg}^2$ . Enfin, nous définissons nos cartes simulées comme

$$\delta_T = (1 - \alpha) \delta_T^{\text{string}} + \alpha \delta_T^{\text{CDM}} + n, \quad (5.19)$$

où  $(1 - \alpha)$  représente la fraction de signal originant des cordes cosmiques, étant donné que nous imposons, arbitrairement,  $\text{rms}(\delta_T^{\text{string}}) = \text{rms}(\delta_T^{\text{CDM}})$  pour des champs lissés à l'échelle de 7 deg. (lobe instrumental de COBE). Ces normalisations relatives peuvent être comparé avec celle de [27], où  $y$  est plutôt considérée une pondération relative des  $\mathcal{C}_\ell$ , telle que

$$\mathcal{C}_\ell = (1 - \beta) \mathcal{C}_\ell^{\text{string}} + \beta \mathcal{C}_\ell^{\text{CDM}}, \quad (5.20)$$

où  $\mathcal{C}_\ell^{\text{string}}$  et  $\mathcal{C}_\ell^{\text{CDM}}$  sont normalisées à COBE (on a donc bien  $\text{rms}(\delta_T^{\text{string}}) = \text{rms}(\delta_T^{\text{CDM}})$  pour un champ lissé à l'échelle du lobe de COBE). Négligeant un coefficient multiplicatif insignifiant, si l'on veut comparer nos résultats à ceux de [27], il suffit de poser  $\alpha^2 / ((1 - \alpha)^2 + \alpha^2) = \beta$ .

## Premiers résultats

Avant d'appliquer cet estimateur, il convient de vérifier l'adéquation de la statistique du  $\chi^2$ , définie à la section précédente, avec une loi du  $\chi^2$ . A cette fin, nous avons calculé le  $\chi^2$  de 300 réalisations d'un champ Gaussien. Si l'on considère 3 échelles de lissage et 8 valeurs de seuil <sup>6</sup>, puisque l'on mesure  $\mathcal{P}_{\text{mont}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{lac}}$ , et puisque l'on fixe une relation entre ces valeurs par la détermination

<sup>6</sup>En fait, certaines mesures étant très corrélées (particulièrement lorsque  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$ ), il serait vain de considérer simultanément toutes les mesures possibles. Cela rendrait la matrice  $C_{\text{I I}'}$  singulière.



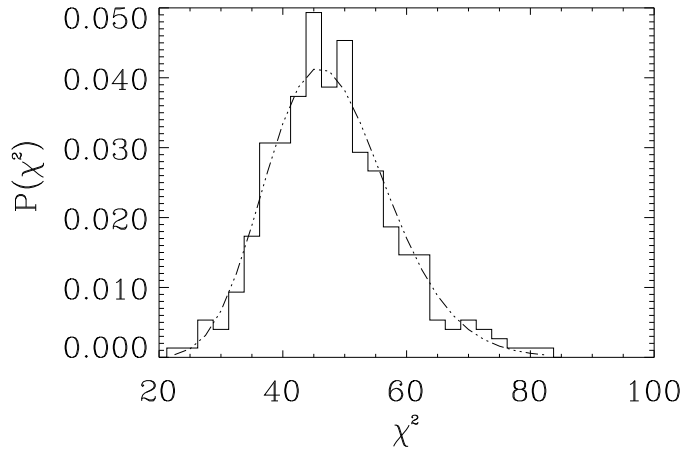


FIG. 5.5

Histogramme des mesures de  $\chi^2$  défini par l'équation (5.18). Mesure réalisée sur 300 réalisations de cartes de fluctuations de température de type CDM, bruitées au niveau nominal de PLANCK. La courbe pointillée correspond à une distribution du  $\chi^2$  avec 47 degrés de liberté. Le bon accord nous permet de faire de ce test du  $\chi^2$  une mesure de la nature Gaussienne du champ observé.

de  $\gamma$ , on s'attend donc à ce que cette statistique suive une loi du  $\chi^2$  à 47 degrés de liberté. Cela s'avère être le cas, comme l'illustre la figure 5.5.

Armé de cette statistique, nous sommes maintenant à même d'effectuer des mesures sur différentes simulations de modèles hybrides. Pour illustrer tout d'abord celles-ci, nous avons représenté, de manière analogue au panneau de la figure 5.4, le cas de cordes cosmiques seules (figure 5.8) et un modèle hybride  $\alpha = 0.7$  (figure 5.9), les deux sans bruit.

Plus quantitativement, nous présentons sur les figures 5.6 et 5.7 des mesures à deux échelles de lissage ( $\sigma_{\text{th}}/\theta_{\text{pix}} = 6.0$  et  $\sigma_{\text{th}}/\theta_{\text{pix}} = 14.0$ ) et à différentes valeurs de seuil ( $\delta_{\text{th}} = -2.0, -1.5, \dots, 1.5$ ) pour, respectivement,  $\alpha = 1$  et,  $\alpha = 0.3$  et  $\alpha = 0.0$ . Les cartes ont été bruitées à un niveau comparable à celui de PLANCK. Un très bon accord est observé dans le cas  $\alpha = 1.0$  (pas de cordes) et l'accord avec les prédictions se dégradent lorsque  $\alpha$  diminue. Notons que notre mode de mesure de  $\gamma$  tend à favoriser un accord pour les points mont, ce qui explique un désaccord toujours plus important pour les points lac. Nous obtenons dans ces trois cas ( $\alpha = 1.0, 0.3, 0.0$ ), des  $\chi^2$  ( $\chi^2/\text{dof}$ ) de 44.1 (0.93), 96.1 (2.04) et 301.5 (6.41) ce qui correspond respectivement à des probabilités  $\mathcal{P}_{\chi^2}(> \chi^2, \text{dof} = 47) = 20\%, 3.1 \times 10^{-5}\%$  et  $0.0\%$ .

Ainsi, de toute évidence, ce test se révèle très sensible. Une étude plus systématique nous permet de constater que PLANCK, *en utilisant simplement*  $12.5^2 \text{ deg.}^2$ , soit 0.4% de tout le ciel, est à même de distinguer avec un niveau de confiance de 99% un fond de cordes caractérisé par  $\alpha_{\min} \sim 0.85$ . Ceci correspond à  $\beta_{\min} \sim 0.92$ , ce qui est bien en dessus de la limite  $\beta_{\min} \gtrsim 0.82$  - soit une contribution aux  $\mathcal{C}_l$  des cordes, au plus de 18% - établie en [27]. Aussi PLANCK, pourrait aisément détecter une telle contribution avec seulement 0.3% du ciel. MAP quant à lui, avec une si faible fraction pourrait détecter  $\alpha_{\min} \sim 0.7$  soit  $\beta_{\min} \sim 0.8$ . Ce serait alors une détection marginale.

Insistons sur le fait qu'en aucun cas, ces chiffres ne représentent les meilleures performances des satellites MAP et PLANCK, mais indiquent plutôt la sensibilité de notre statistique.

### 5.3 Discussion et perspectives

L'estimateur de non-Gaussianité que l'on propose s'est révélé performant, et permettrait certainement, par l'usage de jeux de données déjà existants, de placer des limites plus contraignantes sur  $\alpha$ , ou même de détecter simplement cette composante défendue.

#### Comparaisons succinctes

Alors qu'il a été montré [14] que, sur des cartes de même dimension, le bispectre équilatère ne permettait pas de distinguer - à cause principalement de l'importance de la variance cosmique - une carte de cordes non-bruitée d'une carte d'un champ Gaussien de même spectre (obtenue par simple rotation aléatoire des phases), il fait peu de doute que notre estimateur, lui, le permet.

Par contre, dans ce même travail, il était démontré que la mesure de la fonction de corrélation des pics de hauteur supérieure à  $1 \sigma$  pouvait distinguer ces deux champs. Une comparaison plus précise avec notre estimateur s'imposerait donc mais n'a pas encore été effectuée. Toutefois, nous pouvons supposer que notre estimateur devrait être plus sensible pour deux raisons : le nombre de points considérés étant plus important, la variance cosmique est moindre, et le rapport signal sur bruit est meilleur.

Un autre avantage certain de notre estimateur est la simplicité de sa définition mathématique. Il ne dépend que d'un seul paramètre  $\gamma$ , pouvant être déterminé indépendamment.

#### Applications pratiques

L'application pratique d'une telle méthode sur de véritables données nécessiterait des soins supplémentaires. Parmi les difficultés les plus évidentes, la corrélation du bruit entre pixels, ainsi que son inhomogénéité, pourraient introduire des biais importants. Peut-être, *le fait que cet estimateur soit local* - nous ne considérons simultanément que 9 pixels voisins - le rend-il moins

sensible à l'inhomogénéité. Il est également moins sensible aux problèmes de pixelisation.

Par ailleurs, avant d'attribuer une détection de non-Gaussianité à un signal d'origine cosmologique, il serait crucial de discuter l'importance de la contributions de divers autres composantes astrophysiques, a priori séparées auparavant. Soin devrait être pris également de discuter l'influence des étapes antérieures à l'analyse des données, telles que la fabrication de cartes ou la séparation des composantes, où, bien souvent, la Gaussianité du signal est supposée. Il serait également nécessaire d'évaluer, certainement par une approche de type Monte-Carlo, l'effet d'un bruit corrélé.

Il est bien évident également, qu'une telle détection ne se ferait pas au moyen de ce seul estimateur mais se ferait en conjonction avec la multitude des autres estimateurs évoqués dans l'introduction. Elle ne pourrait, bien sûr, pas se séparer de la mesure des  $\mathcal{C}_\ell$  permettant, en principe, la prédiction de  $\gamma$ . Dans le cas Gaussien, la compatibilité entre les  $\mathcal{C}_\ell$  mesurés et les prédictions qui s'en suivent avec l'hypothèse de Gaussianité constituerait un argument très fort en faveur de la Gaussianité.

## Perspectives

Notre estimateur est sensible à la morphologie des ensembles d'excursions, mais demeure très général par ailleurs. En particulier, il ne bénéficie d'aucune motivation physique et constitue, en ce sens, *un test "non-éduqué"*.

S'il était possible de prévoir des signatures non-Gaussiennes plus spécifiques à certains types de modèles physiques, alors il serait possible de concevoir des tests ciblés, adaptés aux caractéristiques de ce modèle. Par exemple, si l'on devait s'intéresser à la non-Gaussianité induite par un couplage non-linéaire des modes donnant lieu à un certain niveau de non-Gaussianité pour les modèles inflationnaires [9, 31] (qui apparaît naturellement dans l'expression du bispectre), il serait de toute évidence plus efficace de construire une statistique nous permettant de concentrer toute l'information statistique sur les paramètres adéquats. Néanmoins, proposer un modèle physique ne suffit pas nécessairement à déterminer des paramètres évidents, comme l'illustre le cas des scénarios à base de défauts topologiques. Alors, des estimateurs généraux, tels que les nôtres, ou d'autres explorateurs de la morphologie des cartes, peuvent être de très bons outils.

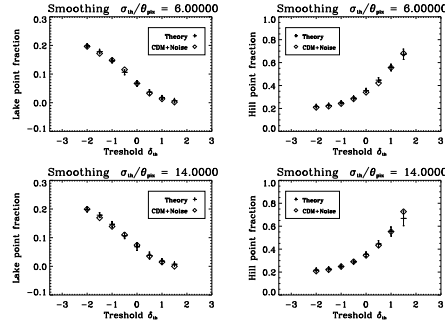


FIG. 5.6

Mesure des points mont et lac sur une simulation de type PLANCK avec un pur CDM ( $\alpha = 1.0$ ). La colonne de gauche montre l'évolution *mesurée* de  $\mathcal{P}_{\text{lac}}$  en fonction du seuil,  $\delta_{\text{th}}$ , pour deux échelles de lissage : la courbe en haut à gauche correspond à  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 6$  et la courbe en bas à gauche à  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 14$ . Les symboles sans barres d'erreur représentent les mesures ; les symboles qui en sont pourvus représentent les prédictions théoriques pour un champ Gaussien. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion à  $1-\sigma$  de 300 réalisations. La colonne de droite est similaire mais concerne  $\mathcal{P}_{\text{mont}}$ .

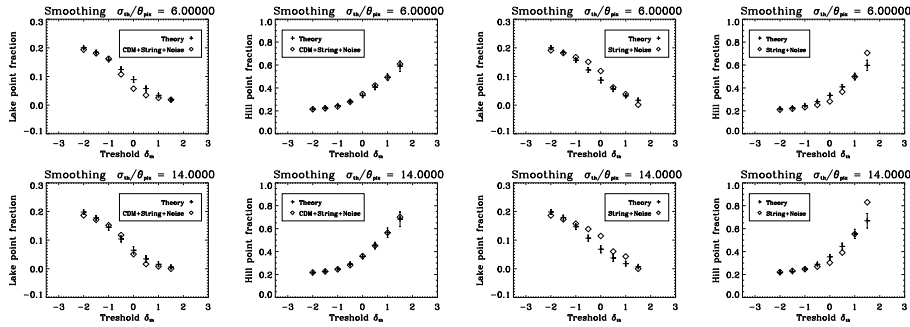


FIG. 5.7

Panneau identique à la figure 5.6 mais pour un modèle hybride,  $\alpha = 0.3$ , pour les 4 courbes de gauche, et  $\alpha = 0.0$  pour les 4 courbes de droite.

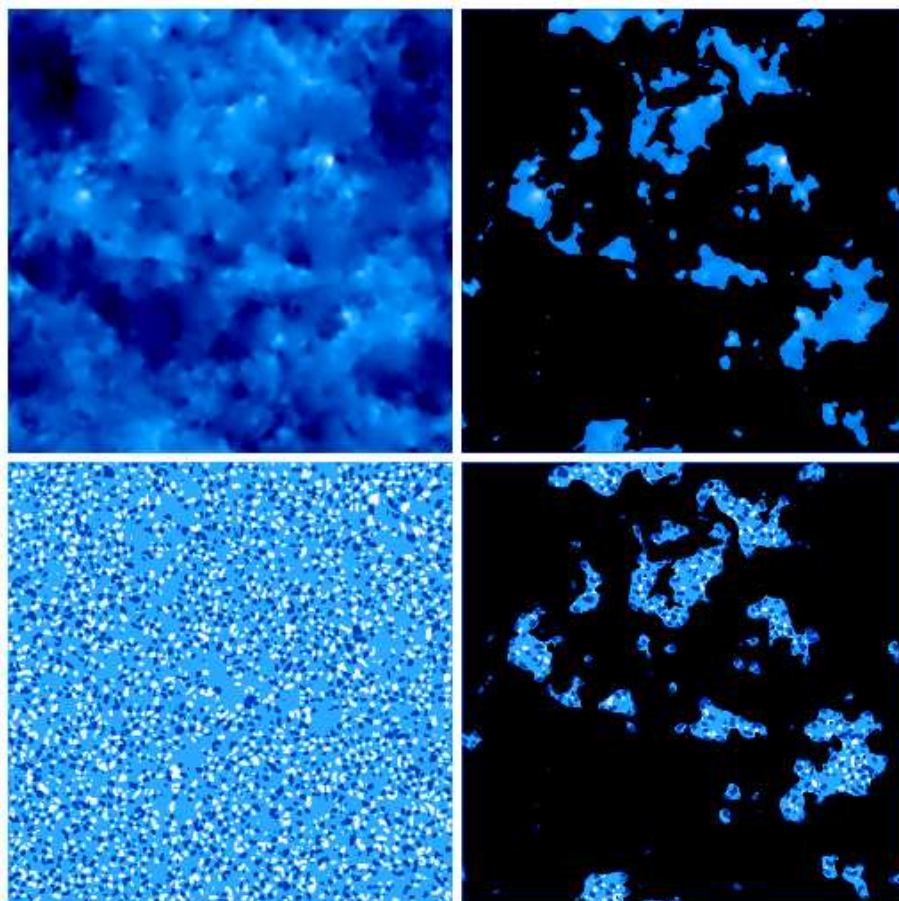


FIG. 5.8  
Panneau identique à la figure 5.4 mais avec des cordes cosmiques seules, et sans bruit.

---

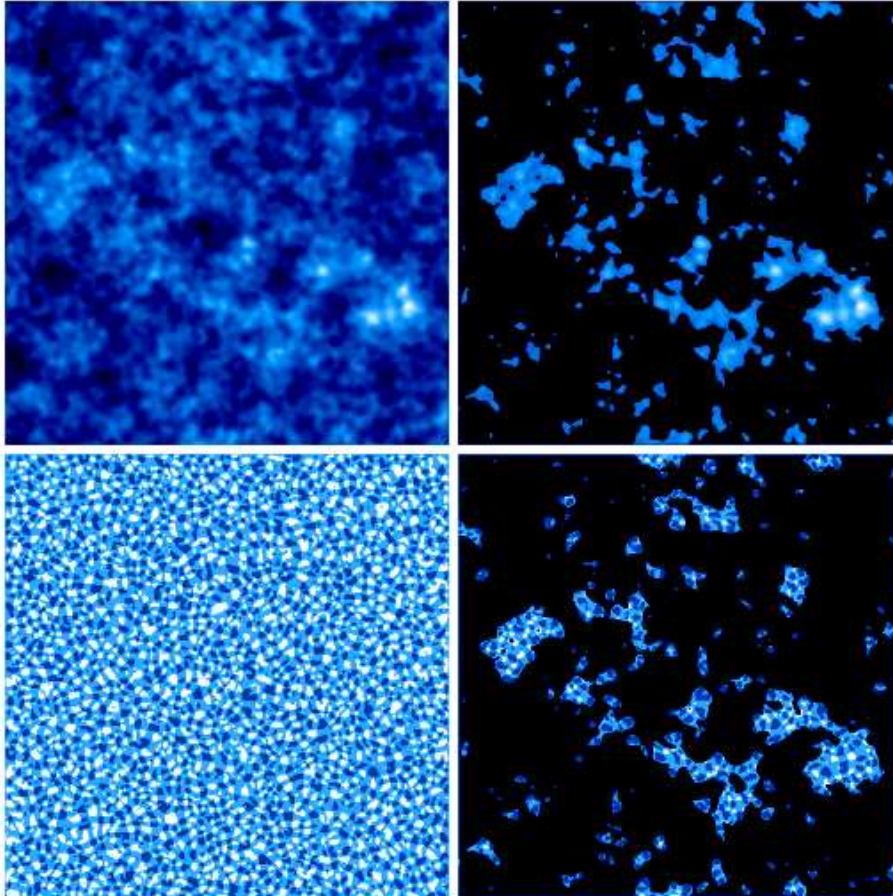


FIG. 5.9  
Panneau identique à la figure 5.4 avec un modèle hybride,  $\alpha = 0.7$ , sans bruit.  
Notons combien il est difficile à l'oeil de différencier ce modèle de celui de la  
figure 5.4.

---

# Bibliographie

- [1] O. Doré, S. Colombi, and F.R. Bouchet. Probing CMB non-Gaussianity using local curvature. *soumis a Phys. Rev. D*, 2001.
- [2] R. Scaramella and N. Vittorio. Non-Gaussian temperature fluctuations in the cosmic microwave background sky from a random Gaussian density field. *ApJ*, 375 :439–442, July 1991.
- [3] G. Hinshaw, A. J. Banday, C. L. Bennett, K. M. Gorski, and A. Kogut. Three-Point Correlations in the COBE DMR 2 Year Anisotropy Maps. *ApJ Let.*, 446 :L67–+, June 1995.
- [4] P. G. Ferreira, J. Magueijo, and K. M. Gorski. Evidence for Non-Gaussianity in the COBE DMR 4 Year Sky Maps. *ApJ Let.*, 503 :L1–+, August 1998.
- [5] J. Magueijo. New Non-Gaussian Feature in COBE-DMR 4 Year Maps. *ApJ Let.*, 528 :L57–L60, January 2000.
- [6] A. J. Banday, S. Zaroubi, and K. M. Górski. On the Non-Gaussianity Observed in the COBE Differential Microwave Radiometer Sky Maps. *ApJ*, 533 :575–587, April 2000.
- [7] L. Verde, L. Wang, A. F. Heavens, and M. Kamionkowski. Large-scale structure, the cosmic microwave background and primordial non-Gaussianity. *MNRAS*, 313 :141–147, March 2000.
- [8] L. Verde, A. F. Heavens, and S. Matarrese. Projected bispectrum in spherical harmonics and its application to angular galaxy catalogues. *MNRAS*, 318 :584–598, October 2000.
- [9] E. Komatsu, B. Wandelt, D. Spergel, A. Banday, and K. Górski. Measurement of the cosmic microwave background bispectrum on the COBE DMR sky maps. *soumis a ApJ*, 2001.
- [10] M.G. Santos. An estimate of the Cosmological Bispectrum from the MAXIMA-1 CMB map. *soumis a ApJ*, 2001.
- [11] N. Aghanim and O. Forni. Searching for the non-Gaussian signature of the CMB secondary anisotropies. *A&A*, 347 :409–418, July 1999.
- [12] N. Aghanim, O. Forni, and F. R. Bouchet. Using the COBE/DMR data as a test-bed for normality assessments. *A&A*, 365 :341–346, January 2001.

- [13] A. F. Heavens and R. K. Sheth. The correlation of peaks in the microwave background. *MNRAS*, 310 :1062–1070, December 1999.
- [14] A. F. Heavens and S. Gupta. Full-sky correlations of peaks in the microwave background. *MNRAS*, 324 :960–968, July 2001.
- [15] R. Adler. *The geometry of random fields*. John Wiley & sons, 1981.
- [16] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay. The statistics of peaks of Gaussian random fields. *ApJ*, 304 :15–61, May 1986.
- [17] P. Coles. The clustering of local maxima in random noise. *MNRAS*, 238 :319–348, May 1989.
- [18] J. R. I. Gott, J. Miller, T. X. Thuan, S. E. Schneider, D. H. Weinberg, C. Gammie, K. Polk, M. Vogeley, S. Jeffrey, S. P. Bhavsar, A. L. Melott, R. Giovanelli, M. P. Hayes, R. B. Tully, and A. J. S. Hamilton. The topology of large-scale structure. III - Analysis of observations. *ApJ*, 340 :625–646, May 1989.
- [19] X. Luo. Statistical tests for the Gaussian nature of primordial fluctuations through CBR experiments. *Phys. Rev. D*, 49 :3810–3829, April 1994.
- [20] G. F. Smoot, L. Tenorio, A. J. Banday, A. Kogut, E. L. Wright, G. Hinshaw, and C. L. Bennett. Statistics and topology of the COBE differential microwave radiometer first-year sky maps. *ApJ*, 437 :1–11, December 1994.
- [21] A. Kogut, A. J. Banday, C. L. Bennett, G. Hinshaw, P. M. Lubin, and G. F. Smoot. Gaussian statistics of the cosmic microwave background : Correlation of temperature extrema in the COBE DMR two-year sky maps. *ApJ Let.*, 439 :L29–L32, February 1995.
- [22] A. Kogut, A. J. Banday, C. L. Bennett, K. M. Gorski, G. Hinshaw, G. F. Smoot, and E. L. Wright. Tests for Non-Gaussian Statistics in the DMR Four-Year Sky Maps. *ApJ Let.*, 464 :L29–+, June 1996.
- [23] J. R. Bond and G. Efstathiou. The statistics of cosmic background radiation fluctuations. *MNRAS*, 226 :655–687, June 1987.
- [24] P. Coles. Comment on “Peak number density of non-Gaussian random fields”. *Physical Review Letters*, 61 :2626+, November 1988.
- [25] S. Winitzki and A. Kosowsky. Minkowski functional description of microwave background Gaussianity. *New Astronomy*, 3 :75–100, December 1997.
- [26] S. Colombi, D. Pogosyan, and T. Souradeep. Tree Structure of a Percolating Universe. *Physical Review Letters*, 85 :5515+, December 2000.
- [27] F. Bouchet, P. Peter, A. Riazuelo, and M. Sakellariadou. Evidence against or for topological defects in the BOOMERanG data ? *A&A in press*, 2000.
- [28] N. Vittorio and R. Juszkiewicz. Hot spots in the microwave sky. *ApJ Let.*, 314 :L29–L32, March 1987.
- [29] F. R. Bouchet, D. P. Bennett, and A. Stebbins. Patterns of the cosmic microwave background from evolving string networks. *Nature*, 335 :410–414, September 1988.



- [30] D.P. Bennett and F.R. Bouchet. High-resolution simulations of cosmic-string evolution. I. Network evolution. *Phys. Rev. D*, 41 :2408–2433, April 1990.
- [31] E. Komatsu and D. Spergel. The cosmic microwave background bispectrum as a test of the physics of inflation and probe of the astrophysics of the low-redshift universe. *submitted to ApJ*, 2001.

Deuxième partie

**Amas de galaxies :  
Physique et Observation**



## Chapitre 6

# Les amas de galaxies : physique et observation

Comme nous l'avons exprimé dans l'introduction, des infimes contrastes de densité primordiaux dont témoignent les fluctuations de température du CMB que nous nous sommes efforcé d'analyser, naîtront, par instabilité gravitationnelle, les grandes structures observées aujourd'hui. De la nature froide de la matière sombre découle la prédominance des fluctuations aux petites échelles de masse au moment de la recombinaison. D'où un scénario hiérarchique où des cycles de croissances et de fusions donneront naissance à la hiérarchie de structures observée.

Nous nous intéresserons dans cette partie aux plus jeunes de ces structures, à savoir les amas de galaxies. Cette jeunesse, allusion à leur formation récente, découle du fait que leur temps caractéristique dynamique,  $t_{dyn} \propto 1/\sqrt{G\rho}$ , avoisine l'âge de l'Univers, *i.e.* le temps de Hubble  $t_H = 2/3 H_0^{-1}$ .

### 6.1 De quelques caractéristiques nécessaires...

Dérivons brièvement ce que *devraient* être les caractéristiques essentielles de ces amas de galaxies si l'on ne se donne que la dispersion de vitesse observée dans les amas riches de galaxies<sup>1</sup> :  $\sigma_v = 1000$  km/s. Pour ce faire, des considérations sur la dynamique d'une perturbation sphérique se révèlent suffisantes. Nous nous plaçons, provisoirement et par souci de simplicité, dans le cadre d'une cosmologie de type *Einstein-de Sitter*. Considérer une autre cosmologie, pour laquelle  $\Omega \leq 1$ , aura en fait peu d'influence sur ces considérations.

Dans un tel modèle, le rayon moyen d'un objet virialisé,  $r_{vir}$ , peut s'exprimer

---

<sup>1</sup>Sans cette donnée, un traitement plus complexe serait nécessaire, en tenant compte, par exemple, d'une approche à la Press-Schechter.

en fonction du temps de rebroussement,  $t_{turn}$  par [1],

$$r_{vir} = \left(\frac{270}{h^{2/3}}\right) \left(\frac{M}{10^{12}M_{\odot}}\right)^{1/3} \left(\frac{t_{turn}}{t_H}\right)^{2/3} \text{ kpc} . \quad (6.1)$$

L'étude de l'effondrement d'une perturbation sphérique nous apprend que le temps de virialisation,  $t_{vir}$ , vaut environ 3 fois  $t_{turn}$ . Aussi, puisque nous observons que les amas de galaxies sont les structures les plus massives virialisée à l'heure actuelle,  $t_{vir} \sim t_H$  soit  $t_{turn} = 1/3 t_H$ . En utilisant la relation  $t = 2/3 H_0^{-1}(1+z)^{-3/2}$ , vérifiée dans un modèle Einstein-de Sitter, on peut déduire  $z_{turn} \simeq 1$ . La relation Eq. 6.1 entraîne pour la dispersion de vitesse,  $\sigma_v$ ,

$$\sigma_v \simeq 127 \left(\frac{M}{10^{12}M_{\odot}}\right)^{1/3} \left(\frac{t_{turn}}{ht_H}\right)^{-1/3} \text{ km/s} , \quad (6.2)$$

ce qui mène directement, si l'on tient compte de la dispersion de vitesse mesurée  $\sigma_v \simeq 1000 \text{ km/s}$ , à  $M \simeq 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ . On obtient alors, en utilisant Eq. 6.1,  $r_{vir} \simeq 1 h^{-1} \text{ Mpc}$ .

Si l'on considère que le gaz cosmique est thermalisé (par les chocs) à la température du viriel,  $T_{vir}$ , lors de son effondrement, alors on obtient,

$$kT_{vir} \simeq kT_g \simeq 7.7 \times 10^7 \left(\frac{M}{10^{15}M_{\odot}}\right)^{2/3} \text{ K} . \quad (6.3)$$

soit pour nous,  $T_{vir} \simeq 10^8 \text{ K}$ .

Si l'on suppose ensuite que la densité des baryons dans les amas est représentative de la densité des baryons dans l'Univers (on ne connaît pas en fait de mécanisme raisonnable qui pourrait rendre compte d'une ségrégation entre baryons et matière sombre à cette échelle), alors ces amas doivent contenir de l'ordre de  $\sim 15\%$  de baryons. Ce qui nous permet de déduire la densité baryonique  $n_b$  suivante :

$$n_b \simeq 10^{-3} \text{ cm}^{-3} . \quad (6.4)$$

L'état de ces baryons est gouverné par sa température et la comparaison entre le temps caractéristique de refroidissement conséquent,  $t_{cool}$ , et le temps dynamique caractéristique de l'amas, soit ici le temps de Hubble. Dans la gamme de température nous intéressant ici, soit en ne considérant que le refroidissement par rayonnement "brehmmstrahlung" thermique, on peut écrire [2]

$$t_{cool} \simeq 8.5 \times 10^{10} \text{ ans} \left(\frac{n_b}{10^{-3} \text{ cm}^{-3}}\right)^{-1} \left(\frac{T_g}{10^8 \text{ K}}\right)^{1/2} , \quad (6.5)$$

si bien que  $t_{cool}$  est plus important que le temps de Hubble pour nous. Remarquons que l'on aurait obtenu naturellement le même schéma en plaçant le point  $(n_b, T)$  correspondant sur la figure 1 de l'introduction générale. Ainsi, ce gaz ne sera refroidi que marginalement.

Au bilan, au regard de la seule mesure des dispersions de vitesse des galaxies composant les amas, et partant de l'hypothèse que le temps caractéristique de virialisation est proche du temps de Hubble, on peut déduire que leur masse

caractéristique est de l'ordre de  $M \simeq 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ , leur rayon de viriel de l'ordre de  $\simeq 1 h^{-1} \text{Mpc}$ , si bien que le gaz cosmique contenu dans leur potentiel n'a pas encore eu le temps de se refroidir et demeure à  $T_{vir} \simeq 10^8 \text{K}$ . Il doit donc être détectable par son émission en X.

Cette analyse, très rapide, donne néanmoins quelques ordres de grandeur corrects sur les amas de galaxies. Nous l'avons compris, ils constituent des objets dont l'intérêt cosmologique est évident. Leur simple existence en tant qu'événement rare de la distribution statistique sous-jacente, leur abondance spatiale et temporelle, les propriétés de leur contenu en matière sombre et/ou baryonique, l'interaction de ces composantes, sont autant de moyens d'accès à des connaissances cosmologiques uniques, et qui nécessiteront, donc, une description fine, et des méthodes d'analyse appropriées : à ces deux points nous avons apporté des contributions. Elles feront l'objet des deux chapitres de cette partie.

## 6.2 ...à une modélisation plus empirique mais efficiente

De cette origine bien comprise et de nombreuses observations, nous déduisons maintenant une description efficiente de la physique de ces amas, description que nous adopterons pour nos travaux présentés dans les chapitres suivants [2].

Un amas de galaxie sera considéré comme un système auto-gravitant composé à  $\sim 80\%$  en masse par de la matière sombre, à  $\sim 15\%$  par un plasma chaud (ICM) ( $T_e = 10^8 \text{ K} \sim 8 \text{ keV}$ ) et dilué ( $n_e = 10^{-1} \text{ cm}^{-3}$  au centre et 1000 fois moins au rayon de viriel,  $r_v$ ) principalement composé de protons et d'électrons, et enfin, de  $\sim 5\%$  de matière lumineuse (poussière, étoile).

- Cette composition suggère que nous considérions que le potentiel gravitationnel soit dû uniquement à la matière sombre. Ceci constitue notre *première hypothèse*. Le plasma sera alors simplement en équilibre dans un potentiel extérieur, *i.e.* nous négligerons tout phénomène d'auto-gravitation. L'équation de Poisson,  $4\pi G\rho_{DM} = \nabla\Phi_{DM}$ , nous sera donc inutile pour la description du gaz.
- Ce plasma sera constitué de protons et d'électrons, *i.e.* on négligera la présence de métaux. Les temps de relaxation dus à l'interaction coulombienne pouvant avoir lieu entre électrons et protons étant négligeables devant les autres échelles de temps caractéristiques de l'amas ( $t_{dyn}, t_H \dots$ ), nous nous autoriserons à admettre *l'équilibre thermodynamique global*, *i.e.*  $T_g \equiv T_e = T_p$  (ce qui est raisonnable jusqu'à  $0.5r_v$ , voir [3, 4]).
- Nous adopterons également l'hypothèse de *stationnarité*, *i.e.* nous supposerons le système gravitant relaxé : les temps de variation du potentiel gravitationnel sont grands devant tout autre temps caractéristique, ce qui exclu par exemple toute fusion récente.
- Le libre parcours moyen des électrons et protons dans un plasma non magnétique étant dû uniquement aux interactions coulombiennes, il sera

négligeable devant les dimensions caractéristiques de l'amas. Par ailleurs, les temps caractéristiques de chauffage ou de refroidissement sont bien plus grands que les temps de collisions élastiques pour les ions et les électrons. Ces faits nous autorisent à traiter ce plasma comme un fluide collisionnel satisfaisant les équations de l'hydrodynamique.

- Par ailleurs, étant donné la faible densité du plasma et sa haute température, il sera considéré comme étant un gaz parfait satisfaisant l'équation d'état

$$P_g = \frac{\rho_g k_B T_g}{\mu_e m_p} \quad (6.6)$$

où  $\mu_e^{-1} = n_e m_p / \rho_g$  est la masse moléculaire moyenne.

- Dans ce gaz considéré comme un fluide, le temps caractéristique de l'équilibre hydrodynamique, *i.e.* le temps que met une onde sonore à traverser le plasma, étant petit par rapport à l'âge probable de l'amas ( $\sim 10^{10}$  yr) le gaz sera considéré comme en *équilibre hydrodynamique et donc hydrostatique*. Ceci suppose également l'absence de variation du potentiel gravitationnel sur des échelles de temps plus petites.
- Enfin, négligeant les effets de viscosité, de conduction thermique et de convection, les équations de conservation de la masse et de l'impulsion, soit les premier et second moments spatiaux de l'équation de Boltzman collisionnelle s'écrivent simplement avec notre hypothèses de stationnarité :

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.7-a)$$

$$\nabla P_g = -\rho_g \nabla \Phi_{DM} . \quad (6.7-b)$$

Au bilan, le plasma chaud et dilué composant l'ICM est décrit adéquatement comme un gaz parfait en équilibre hydrostatique dans un puit de potentiel.

### 6.3 Observations pertinentes

Cette composition des amas et les propriétés du gaz conduisent à de nombreux moyens d'observation dans diverses bandes (optique, radio, millimétrique, sub-millimétrique, X). Parmi ceux-ci, les plus pertinents à la description du gaz seront son émission en X par “brehmsstrahlung” thermique, l'effet Sunyaev-Zel'dovich (SZ), et, enfin, l'outil exceptionnel que constitue la déformation de galaxies d'arrière plan par effet de lentille gravitationnelle.

- La mise en évidence de l'ICM la plus courante provient de son émission X originant de l'accélération des électrons du plasma par le champ électrique des ions ( $p + e^- \rightarrow p + e^- + \gamma$ ). Ce processus de type “brehmsstrahlung” thermique [5] induit une luminosité en X, qui peut s'écrire

$$L_X(E, \Omega) = \int_{\Omega} n_e^2 \Lambda_e(\Delta E, T_e) d\Omega, \quad (6.8)$$

où  $\Lambda_e(\Delta E, T_e)$  désigne l'émissivité du gaz dans une bande d'énergie centrée en  $E$  et  $\Omega$  l'angle solide observé. Cette émission est ainsi proportionnelle à  $n_e^2$ .

- La diffusion Compton inverse des photons incidents du CMB sur les électrons chaud de l'ICM imprimera une signature spécifique et détectable sur le spectre des photons diffusés : l'effet SZ [6, 7, 8, 9]. L'équation de transport décrivant l'effet de cette diffusion sur la distribution d'énergie des photons pourra, du fait de la faible densité de ce plasma, être résolue simplement au premier ordre (négligeant par exemple les effets relativistes [10, 11]). Elle prévoit un décrétement de l'intensité dans la partie de Rayleigh-Jeans du spectre (décrétement couramment détecté), et par conséquent, puisque le nombre de photons est ici conservé, un incrément dans la queue de distribution, dite de Wien. Cette dépendance spectrale distincte constitue la signature clef de cet effet. Si l'on observe dans la partie de Rayleigh-Jeans, l'amplitude du décrétement  $\delta I/I = \delta T/T$  est directement proportionnelle au paramètre de Comptonisation :

$$y = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl n_e k_b T_e \quad (6.9-a)$$

$$= \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl P_g . \quad (6.9-b)$$

où  $dl = c dt$  représente la distance physique le long de la ligne de visée. Mesurer cette dépletion SZ revient donc à mesurer une carte de *pression projetée* le long de la ligne de visée. Une autre spécificité importante de cet effet est sa non dépendance à un facteur de "dilution cosmique" puisque celui-ci se trouve compensé par la variation de température du CMB. Ceci offre donc l'opportunité de détecter des amas avec des  $z$  plus importants que par leur émission en X.

- Enfin, la grande masse de ces amas rend détectable la déformation gravitationnellement induite sur des objets d'arrière-plan. En particulier, dans le régime des lentilles faibles, la population de galaxies de champ d'arrière plan présente à  $z \sim 1$  est suffisamment dense (50 gal/arcmin<sup>2</sup>) pour que le bruit Poissonien affectant ce type de mesure et décroissant en  $1/\sqrt{n_{gal}}$  atteigne simplement quelques % du signal à la périphérie des amas [12, 13].

Cette multitude de moyens observationnels fera des amas de galaxies des objets privilégiés d'études cosmologiques, pourvu que l'on sache exploiter par une analyse conjointe la richesse de ces observations. A ce problème nouveau, conséquence de récents progrès technologiques, nous consacrerons le second chapitre de cette partie. Son premier chapitre montrera, lui, qu'une description physique précise des interactions entre matière sombre et gaz n'est pas sans complications, en particulier en raison de l'importance des phénomènes non-gravitationnels.



# Bibliographie

- [1] M. J. Rees and J. P. Ostriker. Cooling, dynamics and fragmentation of massive gas clouds - Clues to the masses and radii of galaxies and clusters. *MNRAS*, 179 :541–559, June 1977.
- [2] C. L. Sarazin. *X-ray emission from clusters of galaxies*. Cambridge Astrophysics Series, Cambridge : Cambridge University Press, 1988.
- [3] R. Teyssier, R. Chièze, and J. Alimi. *ApJ*, 480 :36–, 1997.
- [4] J. Chièze, J. Alimi, and R. Teyssier. Are large x-ray clusters at thermal equilibrium? *ApJ*, 495 :630+, March 1998.
- [5] G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. New York, Wiley-Interscience, 1979. 393 p., 1979.
- [6] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. *AP&SS*, 4 :301, 1969.
- [7] R. A. Sunyaev and I. B. Zel'dovich. The observation of relic radiation as a test of the nature of x-ray radiation from the clusters of galaxies. *Comments Astrophys. Space Phys.*, 4 :173–178, 1972.
- [8] Y. Rephaeli. Comptonization of the cosmic microwave background : The sunyaev-zel'dovich effect. *ARA&A*, 33 :541–580, 1995.
- [9] M. Birkinshaw. The sunyaev-zeldovich effect. *Phys.Rept.*, 310 :97–195, 1999.
- [10] Y. Rephaeli. Cosmic microwave background comptonization by hot intra-cluster gas. *ApJ*, 445 :33–36, May 1995.
- [11] E. Pointecouteau, M. Giard, and D. Barret. Determination of the hot intra-cluster gas temperature from submillimeter measurements. *A&A*, 336 :44–48, August 1998.
- [12] Y. Mellier. Probing the Universe with Weak Lensing. *ARA&A*, 37 :127–189, 1999.
- [13] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *submitted to Physics Report, astro-ph/9912508*, 2000.

## Chapitre 7

# Chocs et paliers d'entropie : un modèle unificateur pour les groupes et les amas de galaxies.

*L*a compréhension précise de la physique des amas de galaxies <sup>1</sup> est d'un grand intérêt pour la cosmologie, peut-être avant tout car ils constituent un système où l'observation de l'interaction entre baryons et matière noire est possible. D'une part, car l'utilisation de l'effet de lentilles gravitationnelles (précisément mesurable pour de telles masses) nous offre un accès unique à la masse totale (projetée), indépendamment de sa nature baryonique ou non ; d'autre part, car les baryons, principalement sous la forme d'un plasma chaud, sont observés couramment à travers leur intense émission X et l'effet SZ. Aussi importante qu'elle soit à la cosmologie, cette physique n'en demeure pas moins extrêmement complexe, et de vastes zones d'ombre demeurent : elles sont présentement l'objet d'une activité de recherche intense. Parmi ces zones d'ombre, *la question de l'existence et de la nature d'un chauffage non-gravitationnel* du gaz nous a particulièrement intéressé.

Dans ce chapitre, nous présenterons une contribution à cet effort d'éclaircissement, contribution résultant d'une collaboration avec Sergio Dos Santos (Leicester University, UK), et faisant l'objet d'une publication [1] reproduite en annexe .5.

La compréhension de cette interaction passe nécessairement par une étape de modélisation, aussi, dans un premier temps, nous montrerons en quoi une modélisation simple se basant sur les conséquences les plus immédiates d'un modèle hiérarchique de formation des grandes structures dans un Univers dominé par

---

<sup>1</sup>Dans cette partie et la suivante, nous aurons un usage large du terme "amas", incluant sous cette dénomination groupes et amas.

la matière non-baryonique est insuffisante. Prenant acte de cette insuffisance, et des scénarios communément proposés pour y remédier, nous développerons une approche *analytique* et montrerons en quoi un modèle de chauffage externe semble à même de reproduire la vaste majorité des observations actuelles, rassemblées sous forme de corrélations entre les observables  $X$  et  $SZ$ , telles que les lois  $L_X - T$ ,  $y - T$ ,  $M_g - T$ ,  $L_X - y$ . Enfin, nous discuterons les limitations et les hypothèses critiques d'un tel modèle, ainsi que ses extensions potentielles.

## 7.1 De l'apparente simplicité d'un univers hiérarchique

### Une simple description en loi de puissance

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre introductif, dans un Univers dominé par la matière non-baryonique, notre compréhension actuelle de la formation des grandes structures, dont les amas de galaxies forment les objets les plus massifs gravitationnellement liés, fait appel à des scénarios hiérarchiques où les fluctuations primordiales, amplifiées sous l'action de la gravité, s'effondrent, puis fusionnent, pour former des systèmes de dimensions croissantes.

Cette origine hiérarchique confère, en principe, à cette population d'amas, des propriétés auto-similaires simples [2], reliant température du gaz, masse de gaz et masse totale, profil de gaz et donc luminosité en  $X$ ...

Ces considérations ont été grandement appuyées par de récentes simulations numériques [3] qui ont montré l'existence de telles relations de similarité dans les amas (plutôt riches)<sup>2</sup>. Ces amas simulés ont, tout d'abord, une densité caractéristique quasiment constante,  $\bar{\rho} = M/R^3 = \text{Constante}$ , où  $M$  et  $R$  désignent une masse et une taille caractéristique de l'amas. Une fois ramenés à l'échelle de leur rayon de viriel,  $R_v = (GM/R)^{1/2}$ , les profils de densité de matière noire d'amas relaxés sont quasiment identiques (et, en fait, indépendants de la cosmologie, d'où leur nature "universelle"). Aussi, si le gaz trace la masse, les profils de brillance de surface en  $X$  devraient également être similaires. Par ailleurs, la relation attendue entre la luminosité  $X$  et la température est  $L_X = M_g^2 R^{-3} \Lambda$ , où  $\Lambda$  désigne l'émissivité en  $X$ . Dans la gamme d'énergie nous intéressant, l'émissivité de type "bremsstrahlung" thermique est  $\Lambda \propto T_g^{1/2}$ , si bien que supposer le gaz isotherme à la température du viriel  $T_g \propto GM/R \propto R_v^2 \propto M^{2/3}$ , conduit à cette relation attendue entre la luminosité  $X$  et la température :  $L_X \propto f_g^2 T_g^2$ , où la fraction de gaz est  $f_g = M_g/M$ . Enfin l'entropie du gaz peut s'écrire  $S = T_g/n_g^{2/3} \propto T_g$ , puisque la densité est quasiment constante ( $\propto \bar{\rho}$ ).

---

<sup>2</sup>Même si [3] ne considérait que la matière noire, ces résultats ont été confirmés par des simulations hydrodynamiques adiabatiques qui n'incluaient, toutefois, ni refroidissement, ni physique baryoniques complexes (formation des galaxies, ...), voir par exemple [4, 5, 6].

## Des observations contradictoires et un nécessaire chauffage “non-gravitationnel”

Mais ces simples considérations ont été mises à mal par au moins trois types d'observations, robustes. Tout d'abord, la relation  $L_X - T$  apparaît beaucoup plus pentue qu'escomptée, puisqu'on observe plutôt  $L_x \propto T^3$  ou  $L_x \propto T^4$ , voire  $L_x \propto T^5$  pour les groupes [7, 8, 9, 10].

Ensuite, les profils de densité de gaz ne sont pas similaires [11]. Même si les amas riches présentent la relation attendue, ce comportement n'est plus observé pour les amas pauvres qui présentent un profil plus plat <sup>3</sup>.

Finalement, il a été observé un aplatissement certain de la relation entre l'entropie centrale (en dehors du flot de refroidissement) et la température du gaz à basse température, aplatissement que nous nommerons palier d'entropie (“entropy floor”) [11].

À ces observations, deux explications ont été avancées. La non-similarité des profils pourrait être justifiée par le fait que les amas riches possèdent systématiquement une fraction de gaz plus importante qu'escomptée [12], mais cela ne justifierait pas l'existence d'un palier d'entropie (alors non clairement mis en évidence). Cette non-similarité des profils de gaz pourrait, par ailleurs, être plus systématique et due à une différence entre les distributions de gaz et de matière noire. En particulier, il a été proposé [13, 14] que l'ICM ait été chauffé avant son effondrement, chauffage imposant un minimum d'entropie au centre des amas.

L'intérêt de ce dernier modèle est évident, puisque le chauffage (par le biais d'une valeur entropie minimale fixée) impose une densité centrale au coeur des amas croissant comme  $T^{3/2}$  et affecte davantage les amas froids en réduisant leur luminosité <sup>4</sup>, augmentant ainsi la pente de la relation  $L_X - T$ .

Par la suite, nous accepterons ce modèle de chauffage. Nos travaux se placent dans ce contexte.

## Des modèles de chauffage et de leurs incertitudes

Accepter l'hypothèse d'un chauffage d'origine non-gravitationnelle n'indique que la trame d'une solution. Encore faut-il identifier le mécanisme à l'origine de ce chauffage, l'instant où il a lieu, et, enfin, quantifier son importance. Avant d'en venir à notre modèle, nous allons discuter brièvement chacun de ces points.

Les sources de ce chauffage envisagées à l'heure actuelles sont les suivantes.

- La formation d'étoiles et en particulier de super-novae constitue de toute évidence l'origine la plus probable de ce chauffage. À cette conviction plusieurs raisons. Des mécanismes permettant d'éjecter des quantités importantes d'énergie sont bien connus (type vent stellaire) et observés dans des

---

<sup>3</sup>Ce phénomène s'observe à des rayons où le temps de refroidissement est bien plus grand que l'âge de l'univers, si bien que “les courants de refroidissement” (observés au coeur des amas en question) ne sont pas en cause.

<sup>4</sup>Notons le paradoxe bien connu : les amas “chauffés”, du fait de leur densité plus faible et de l'émissivité  $X$  en  $n_g^2$  et de leur température proche de celle du viriel, ont une luminosité  $X$  plus faible. . .

amas de galaxies. La métallicité observée dans l'ICM ( $Z \sim 0.3Z_{\odot}$ ) suggère fortement un enrichissement par ce type de vent stellaire. Mieux encore, il a été montré que le nombre de SNaI nécessaire pour enrichir l'ICM avec les fractions de métaux observées peut suffire à réchauffer le gaz à un niveau suffisant [15, 16]. Seule ombre à ce tableau : l'efficacité requise (60%) du transfert d'énergie entre SNaI et gaz semble trop importante. Notons toutefois que la physique des SNaI en général, et de ce type de transfert en particulier, contient encore suffisamment d'incertitudes pour nous empêcher de tirer des conclusions fortes quant à la viabilité d'un tel mécanisme [17] <sup>5</sup>.

- Les noyaux galactiques actifs (AGN) et les radio-galaxies [18] pourraient naturellement être également à l'origine de ce chauffage. Deux points semblent défavoriser ces scénarios, ou tout au moins, les rendent plus hypothétiques. Tout d'abord, aucune observation ne semble favoriser ce type de chauffage au sein des amas (pas de chocs visibles à proximité d'AGN dans les amas). Plus généralement, les mécanismes permettant d'extraire une faible fraction de l'énergie disponible (de l'ordre de 1% seulement) sont encore inconnus (notons que cet argument pourrait être également considéré comme positif, puisque seulement une faible fraction de l'énergie est nécessaire). Enfin, afin de tester cette possible source de chauffage, il a été recherché une corrélation entre la luminosité X dans les groupes (où le chauffage prédomine) et la présence de galaxies elliptiques, où les sources actives (AGN radio-bruyant) se situent préférentiellement. L'absence de telles corrélations est un élément majeur en défaveur d'un chauffage par les AGN [19].

Notons à ce niveau, qu'il a été suggéré un mécanisme élégant pouvant reproduire ce palier d'entropie sans faire appel à un chauffage mais utilisant plutôt un refroidissement [20, 21]... Le gaz froid et de plus faible entropie serait soustrait aux amas par la formation de galaxies... Le gaz restant ayant un temps de refroidissement de l'ordre du temps de Hubble n'aurait pas pu se refroidir et constituerait donc le palier observé. Ceci requiert donc qu'un gaz avec un niveau d'entropie correspondant au palier ait un temps de refroidissement égal à celui de Hubble, ce qui semble être observé [22]. Néanmoins, la trop grande quantité ( $\sim 50\%$ ) de gaz devant ainsi disparaître semble problématique... Par ailleurs, cela impliquerait que le rapport entre la masse de gaz et la masse d'étoiles soit plus important dans les groupes que dans les amas riches, ce qui n'est pas observé de manière nette [19, 21]. Notons, par ailleurs, qu'un tel mécanisme n'apporte pas de solution au problème du "refroidissement catastrophique" précédemment mentionné [23, 24]. Ce mécanisme, fort de son élégance, n'est toutefois pas sans difficultés.

Supposant donc l'existence d'un chauffage non-gravitationnel significatif, une fois la source de chauffage du gaz connue, demeure la question de savoir à quel moment le chauffage a eu lieu. En la matière, deux scénarios s'opposent, mettant en oeuvre un chauffage "interne", *i.e.* après effondrement du gaz dans

---

<sup>5</sup>Le refroidissement induit est par exemple souvent négligé.

le puit de potentiel, ou bien “externe”, *i.e.* avant effondrement. Notons, avant tout, que cette distinction relève d’un certain arbitraire, et qu’un chauffage continu peut être favorisé [25].

L’idée d’un chauffage avant l’effondrement du gaz est séduisante. Si le gaz est chauffé à ce moment, cet excès d’entropie sera préservé dans le coeur des amas après virialisation (l’entropie créée par les chocs étant plus ou moins négligeable comme nous le verrons par la suite, en allant des amas aux groupes). Toutefois, cet excès d’entropie ne peut pas être réparti uniformément dans les baryons cosmiques avant effondrement sous peine de faire disparaître la forêt  $\text{Ly}_\alpha$ . De fait, cette forêt témoigne d’un chauffage à une température de  $10^4\text{K}$  [26], un ordre de grandeur inférieur aux besoins des amas. Une solution naturelle à ce problème réside en un chauffage biaisé du gaz, *i.e.* uniquement dans les zones de surdensités où réside déjà le gaz allant s’effondrer. Notons qu’une telle distribution de gaz est indétectable directement à haut  $z$  mais devrait être détectée dans des systèmes absorbant OVI à  $z$  moyen ou faible [27, 28].

La réponse à ces questions est difficile et, en fait, non-séparable du problème lié au type de chauffage lui-même. En effet, développer un mécanisme plausible nécessite de connaître les besoins précis, lesquels dépendant eux-mêmes de l’instant où a lieu le chauffage, puisque plus dense est le gaz (plus tard dans l’évolution), plus important doit être l’apport d’énergie par particule (évalué typiquement à  $\sim 1\text{ keV}$  par particule). Des indications peuvent venir de l’étude d’autres conséquences de ces deux types de scénarios, par exemple sur la formation de courants de refroidissement ou sur l’évolution de la fraction baryonique avec  $T$  [29]. De toute évidence, cette situation de crise ne sera résolue qu’au prix d’observations nouvelles et de simulations comprenant une modélisation de la physique des baryons plus réalistes (refroidissement, formation d’étoiles, ...).

Notons que ces modèles de chauffage propres aux amas de galaxies apportent des contraintes complémentaires à celles déduites des fonctions de luminosité des galaxies [23, 30] et doivent donc être compatibles.

## 7.2 Un modèle unissant les groupes et les amas

Nous n’apporterons pas de réponses à ces points mais montrerons, au moyen d’un modèle *analytique*, comment l’existence d’un palier d’entropie (d’origine externe) permet de décrire l’ensemble des observations actuelles. En quelque sorte, notre modèle confirme la crise et le caractère attrayant des modèles de chauffage externes, même s’il n’en fournit pas l’origine.

Le chauffage externe sera choisi par opposition à un chauffage interne car il permet plus facilement une description analytique : de fait, pour le modéliser, il suffit de considérer que l’ICM, avant son effondrement, possède une certaine entropie, supérieure à l’entropie moyenne du gaz cosmique (non chauffé).

Le principe de notre approche est le suivant : nous exprimons les lois d’échelle sus-mentionnées en fonction du *profil d’entropie spécifique du gaz* au moyen d’hypothèses physiques simples. Nous dérivons ensuite une expression analytique du profil d’entropie spécifique (ou plutôt de sa normalisation) en consi-

dérant un modèle de choc à la Cavaliere, Mecci & Tozzi (CMT) [31]. Ceci nous permet de déduire une expression analytique pour toutes ces relations d'échelle. Ensuite, *l'ajustement d'une simple constante de normalisation* nous permet de reproduire l'ensemble de ces relations observées. Ce succès nous amènera à considérer l'entropie comme l'observable clef pour les amas, suivant en cela [32].

### Hypothèses

Comme discuté précédemment, nous supposons la validité de la description du plasma chaud et dilué par un gaz parfait d'équation d'état

$$P_g = \frac{\rho_g k T_g}{\mu m_p}, \quad (7.1)$$

et la vérification de la conservation de la masse et de l'équilibre hydrostatique, qui s'écriront

$$\nabla(\rho_g v) = 0 \quad (7.2-a)$$

$$\nabla P_g = -\rho_g \nabla \phi. \quad (7.2-b)$$

Si l'on adjoint à ces trois équations l'équation de Poisson, alors ce système est fermé et des solutions pour les profils peuvent être trouvées. Afin toutefois de spécifier totalement ces solutions, des conditions au bord doivent être également précisées. Décrire l'évolution de ces conditions limites en fonction de la masse (ou de la température) sera la principale articulation de notre approche, et nous montrerons que l'évolution de ces conditions avec  $T$  rendra compte des relations d'échelle nous intéressant.

Pour exprimer ces conditions au bord, l'existence d'un choc se révèle cruciale. En effet, comme cela a été montré par l'usage de simulations numériques [33] le flot de gaz devient supersonique au voisinage du rayon de viriel d'un amas si bien qu'un front de choc se forme, transformant un excès d'énergie cinétique en énergie thermique. Au moyen des relations de Rankine-Hugoniot [34], nous pouvons exprimer les relations entre grandeurs thermodynamiques post-chocs et pré-chocs. Nous distanciant en cela de CMT, nous avons trouvé une expression approximative (à mieux de 4% dans notre domaine d'intérêt) permettant de relier l'adiabat de part et d'autre du choc, relation d'un usage particulièrement simple.

En effet, définissant l'entropie spécifique du gaz par

$$s = S/c_v = \ln \left( \frac{k T_g}{\rho_g^{\gamma-1}} \right) \quad (7.3)$$

où  $\gamma$  est l'indice polytropique du gaz (fixé dorénavant à 5/3), nous pouvons définir l'adiabat comme <sup>6</sup>

$$K = (\mu m_p)^{\gamma-1} e^s = \frac{k T_g}{n_g^{\gamma-1}} = (k T_g) n_g^{-2/3}. \quad (7.4)$$

---

<sup>6</sup>Cette définition diffère d'un facteur  $(\mu m_p)^{\gamma-1}$  de la définition habituelle, par exemple [35].

où  $n_g = \rho/(\mu m_p)$ . Notons que par la suite  $T_g$  sera exprimée en keV si bien que nous noterons  $T_g$  au lieu de  $kT_g$ .

Si l'on suppose que le choc est très efficace, *i.e.* que la vitesse du flot dans le référentiel de l'amas est négligeable après le choc, alors, notant

$$\epsilon = \frac{15}{4} \frac{kT_1}{\mu m_p v_1^2}, \quad (7.5)$$

où les quantités indicées 1 et 2 désignent respectivement les quantités pré- et post-choc, nous arrivons à une simple relation entre l'adiabat avant et après le choc :

$$K_2 = \frac{17}{16} 2^{-1/3} K_1 \left( 1 + \frac{10}{17} \frac{1}{\epsilon} \right). \quad (7.6)$$

Cette expression, outre sa compacité, bénéficie d'une interprétation aisée et satisfaisante. Les amas riches accrètent principalement des petites structures ou du gaz diffus. La différence entre la température du viriel et la température externe est telle que la limite de *choc fort* ou, *flot froid*, est appropriée. Cette approximation se traduit par  $T_2 \gg T_1$  et  $\epsilon \ll 1$ , si bien que

$$K_2 \simeq \frac{5}{8} 2^{-1/3} K_1, \quad (7.7)$$

ce qui entraîne le fait que dans les amas riches, l'entropie sera principalement créée par les chocs.

Les groupes, eux, accrètent principalement un gaz préchauffé et diffus mais le gradient de température entre la température du viriel et la température de l'IGM est moindre, si bien que l'approximation de *choc faible*, ou accréation adiabatique, est valide. Elle s'écrit pour  $\epsilon \rightarrow 1$

$$K_2 \simeq \frac{27}{16} 2^{-1/3} K_1. \quad (7.8)$$

Ceci implique que l'entropie des groupes est dominée par "l'entropie accrété" d'où l'existence d'un palier d'entropie (indépendant de  $\epsilon$ ).

### Unir les groupes et amas par une relation $K - T$ généralisée

Nous désirons maintenant utiliser cette relation, afin d'en déduire une relation  $K - T$  valide pour les amas et les groupes.

Ceci se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, en utilisant le théorème du viriel, la relation  $M - T$ , et l'hypothèse de flot froid adiabatique, on peut relier  $v_1$  (introduit dans l'Eq. 7.5) et  $T_g$ . Ceci nous permet d'obtenir la relation :

$$K_2(T) = K_0 \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Cette relation constitue un résultat clef de notre approche. Elle exprime le gain en entropie suite à un choc comme une fonction simple de la température



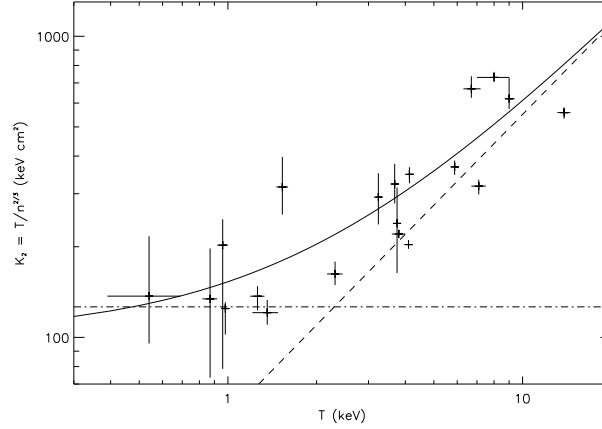


FIG. 7.1

Adiabat post-choc  $K_2$  en fonction de la température moyenne du système. La ligne solide est obtenue avec l'équation (7.9), où l'on a considéré  $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ . Seule la normalisation est ajustée puisque  $T_0 = 2 \text{ keV}$  est précédemment fixé. La ligne pointillée est le meilleur ajustement  $K \propto T$  déterminé par [10]. L'auto-similarité de la normalisation de l'adiabat du modèle de choc (calculé au rayon de viriel) avec les mesures effectuées au centre ( $R = 0.1 r_v$ ) suggère l'idée d'une certaine similarité des profils d'entropie.

moyenne du gaz. Écrite ainsi, elle possède deux paramètres libres :  $K_1 \simeq K_0$ , une normalisation avant le choc, et, une température  $T_0$  exprimant la transition entre le régime de choc fort et le régime de flot adiabatique.

Dériver la valeur de  $K_1$  est délicat et requiert une modélisation complète de l'histoire de l'entropie de l'ICM, ce qui pourrait se faire dans l'esprit de [30]. Ceci dépasse l'ambition de notre modèle. Par contre, nous pouvons relier  $K_0$  et  $T_0$  moyennant quelques considérations physiques supplémentaires<sup>7</sup>. Nous pouvons ainsi calculer  $T_0 \sim 2 \text{ keV}$ , ce qui réduit à un le nombre de paramètres libres de notre modèle :  $K_0$ , simple constante de normalisation.

### Première comparaison avec les observations

Afin de comparer cette relation aux observations, mais aussi afin de déterminer la valeur de  $K_0$ , nous utilisons les données de Helsdon et Ponmann [10]. Malheureusement, la sensibilité actuelle des instruments d'observation en X,

<sup>7</sup>Au nombre desquelles figure, le fait que le gaz soit préchauffé avant le rebroussement ("turn-around") mais, que son entropie ne varie pas entre ce point de rebroussement et le rayon de viriel, la validité d'un modèle d'effondrement sphérique, et, certains résultats obtenus par des simulations numériques (voire appendice B de l'article [1]).

conjuguée à la décroissance de la densité de gaz avec  $r$ , rendent impossible la mesure de l'entropie à  $r_v$ , où notre relation est définie. Aussi, nous sommes contraints de calibrer notre relation précédente sur des mesures à  $R = 0.1 r_v$ . Le bon accord, néanmoins résultant, entre notre relation (où l'on utilise la valeur calculé  $T_0 = 2$  keV) et ces mesures, illustré par la figure 7.1, plaide en faveur d'une auto-similarité approximative des profils d'adiabat dans les amas. Ce point se révèlera d'une certaine importance par la suite.

Plus précisément, cette coïncidence entre le comportement de l'adiabat calculé au rayon de viriel et la valeur observée à l'intérieur de l'amas, suggère que le mécanisme physique à l'origine de ces valeurs soit le même, *i.e.* la compétition entre chocs et entropie de l'IGM accréte. Ceci est confirmé par les simulations hydrodynamiques 3-D [36, 37, 38], qui montrent qu'après la dernière fusion majeure et la formation d'un coeur isentropie, un front de choc quasiment sphérique se forme et se propage vers l'extérieur. Aussi, la même physique est à l'oeuvre en allant du coeur vers le rayon de viriel. Cette explication nous permet de regarder un profil d'adiabat d'une toute autre manière.

Se rapprochant du coeur, on traverse une succession de coquilles accrétées à des âges croissants, si bien qu'explorer la dépendance en  $r$  du profil d'adiabat (par exemple) revient en quelque sorte à explorer l'histoire d'accrétion de l'amas. Ceci pourrait nous permettre, au moyen du modèle de choc précédemment détaillé, de décrire l'adiabat de l'ICM avant le choc à différents âges, *i.e.* d'avoir accès à une quantité  $K_1(z)$ . Une telle manière de voir les choses n'a pas encore fait l'objet d'études suffisamment approfondies, mais devrait faire l'objet de certains de nos travaux.

Par la suite, nous nous contenterons d'utiliser la relation  $K - T$  précédemment calibrée, et nous en déduirons les relations  $L_X - T$ ,  $y - T$  ou bien  $L_X - y$ .

### 7.3 Prédiction pour les relations d'échelles

Dans cette section, nous détaillerons comment, de la relation  $K - T$ , établie dans la section précédente, nous pouvons déduire une relation  $L_X - T$ . Les autres relations pourront être dérivées de manière analogue.

#### Obtention de la relation $L_X - T$

En toute généralité, la luminosité  $X$  totale d'un amas peut s'écrire

$$L_X = \int_V n_e^2 \Lambda_e(\Delta E, T_e) dV, \quad (7.10)$$

où l'intégration se fait sur le volume  $V$ , et où  $\Lambda_e(\Delta E, T_e)$  désigne l'émissivité du gaz dans une bande d'énergie donnée,  $\Delta E$ . Par la suite, on considèrera simplement  $\Lambda_e = \Lambda_0 T^{1/2}$ , ce qui est approprié pour l'émission de type "Brehmstrahlung" thermique, dominante dans les bandes d'énergie observée par les satellites actuels.

Réexprimant cette luminosité en fonction de l'adiabat, et, supposant *l'isothermalité du gaz*, on obtient

$$\frac{L_X}{T^{7/2}} = \Lambda_0 \int_V \frac{dV}{K^3}. \quad (7.11)$$

Si l'on connaissait exactement  $K(\mathbf{r}, T)$ , alors cette dernière relation nous donnerait directement la relation  $L_X - T$ . Néanmoins, la relation  $K - T$  précédente ne nous donne que l'évolution de la *normalisation* avec  $T$ , aussi, en principe, nous avons besoin de connaître la dépendance en  $\mathbf{r}$ , *i.e.* le profil, afin de pouvoir intégrer sur le volume. Toutefois, comme nous l'avons noté ci-dessus, la validité de notre relation  $K - T$  à des rayons différents de  $R = r_v$  suggère une auto-similarité approximative du profil d'adiabat. Ceci nous permet de supposer que la dépendance en  $T$  de la fonction  $K(T, \mathbf{r})$  n'intervient qu'à travers une constante de normalisation, soit

$$K(\mathbf{r}, T_2) = K_2(T_2) f(\mathbf{r}), \quad (7.12)$$

où  $K_2(T_2)$  est donné par l'équation (7.9) et  $f(\mathbf{r})$  est une simple fonction de  $\mathbf{r}$ , *i.e.* indépendante de la température moyenne du système. On peut donc écrire,

$$\frac{L_X}{T^{3+\alpha}} = \Lambda_0 K_2(T)^{-3} \int_V \frac{dV}{f^3(\mathbf{r})}. \quad (7.13)$$

Toutefois, l'intégrale sur le volume précédente dépend encore de  $T$  car le volume total dépend de  $r_v$  et donc de  $T$ . On définira par la suite le volume total comme le volume circonscrit par la surface  $R = r_v$ , ce qui nous permettra d'explicitier la dépendance en  $T$ . Si on suppose en plus *la sphéricité* (ce qui est raisonnable pour des amas suffisamment relaxés) alors, on peut écrire,

$$\int_V \frac{dV}{f^3(\mathbf{r})} = 4\pi \int_0^{r_v} r^2 f^{-3}(r) dr \quad (7.14-a)$$

$$= 4\pi r_v^3 \int_0^1 x^2 f^{-3}(x) dx \quad (7.14-b)$$

$$\equiv 4\pi r_v^3 Q_X \quad (7.14-c)$$

où l'on a posé  $x = r/r_v$  et défini le facteur de forme  $Q_X$ . La valeur de ce facteur de forme peut être calculée en considérant par exemple un  $\beta$  modèle [39], ce qui conduit à  $Q_X \sim 0.11$ .

Utiliser alors les relations  $r_v - T$  et  $M - T$ , conséquentes au théorème du viriel, nous mène à

$$L_X = L_0 T^5 \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right) \right]^{-3} \quad (7.15-a)$$

$$= 5.643 \times 10^{42} T^5 \left[ 1 + \frac{T \text{ (keV)}}{2} \right]^{-3} h_{2/3}^{-2} \text{ erg s}^{-1}. \quad (7.15-b)$$

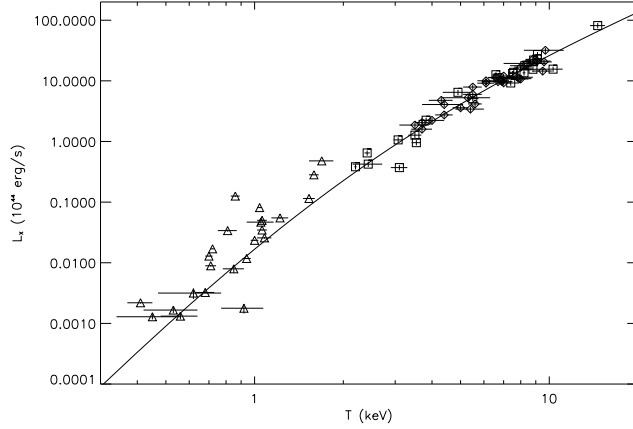


FIG. 7.2

Relation  $L_X - T$  analytique et observations de [10] pour les groupes et pour les amas riches [7, 9]. La ligne solide est la formule analytique. (7.15).  $T_0$  a été fixé à la valeur calculé précédement, *i.e.*  $T_0 = 2$  keV, ainsi que  $Q_X = 0.115$  et  $K_0$ .

où l'on a utilisé uniquement la valeur de  $K_0$  ( $K_0 = 102$  keVcm<sup>2</sup>) précédement ajustée et quelques constantes définies par ailleurs.

Là encore, l'interprétation de cette relation est conforme à ce que l'on attend. Pour  $T \ll T_0$ , *i.e.* pour les groupes où l'adiabat des amas est dominé par la valeur pre-choc, on obtient

$$L_X \propto T^{9/2} \propto T^{4.5}, \quad (7.16)$$

alors que pour les amas riches où  $T \gg T_0$ , l'adiabat est imposé par les chocs [31] et l'on obtient

$$L_X \propto T^{9/2+1/2-3} \propto T^2. \quad (7.17)$$

Nous observons donc bien, comme attendu, un comportement de type auto-similaire à haute température (voir section 7.1) mais avec un écart à l'auto-similarité à plus bas  $T$ , caractérisé par un accroissement de la pente.

Ainsi, au moyen de quelques hypothèses physiques supplémentaires faibles (telle l'isothermalité et la sphéricité qui sont avérées en moyenne au moins), nous sommes à même de prédire une relation  $L_X - T$  que nous comparons maintenant aux observations.

### Comparaison avec les observations

Afin de comparer les précédentes prédictions aux données, nous utilisons des mesures de luminosité dans les amas riches [7, 9] et les groupes [10]. Utilisant les

valeurs de  $Q_X$  et  $K_0$  précédemment dérivées, aucun paramètre libre ne demeure. Les données et notre relation sont tracées sur la figure 7.2. L'accord est de toute évidence excellent, et à notre connaissance le seul modèle analytique simple permettant de reproduire les observations, des groupes aux amas.

Le fait que les groupes chauds ( $T \sim 1$  keV) semblent être plus lumineux tient probablement à la présence de courants de refroidissement non corrigés dans ces groupes [10], alors qu'ils sont pour les amas plus riches, soit absents [7], soit soustraits [9]. Les groupes de plus basse température, généralement supposés exempts de tels courants sont, par contre, remarquablement reproduits par le modèle.

Cet accord avec les données apporte un grand crédit à notre approche. Nous avons naturellement effectué cette comparaison, non pas tant pour les valeurs de paramètres ainsi déterminés, mais plutôt pour illustrer la pertinence de notre description. Celle-ci est renforcée par le fait que d'autres relations, telles  $M_{ICM} - T$ ,  $f_{gaz} - T$ ,  $y - T$  et  $y - L_X$ , peuvent être dérivées de manière analogue sans ajuster aucun nouveau paramètre, et se trouvent être en très bon accord avec les données.

À titre d'exemple, nous reproduisons sur la figure 7.3 la relation  $y - L_X$  dérivée de la même manière, ainsi que les données compilées en [40]. Notons que cette comparaison est particulièrement intéressante en ce qu'elle permet de tester notre approche sur des observations mettant en jeu des mécanismes physiques différents (la diffusion Compton inverse des photons du CMB sur les électrons du plasma et l'émission "free-free") et des techniques observationnelles différentes. Toutefois ces observations SZ, même si en progrès constant, ne sont pas encore d'une qualité égale à celle des observations X actuelles, d'où, entre autres une dispersion plus importante.

## 7.4 Discussions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons vu comment par une modélisation simple des processus à l'origine de l'entropie dans les amas, *i. e.* les chocs et un pré-chauffage de l'ICM, nous pouvions déduire une relation  $K - T$  générale d'où diverses relations d'échelle  $L_X - T$ ,  $y - T$ , etc., découlaient simplement. L'adéquation entre ces relations et les observations nous a conforté dans notre croyance à la validité de cette approche.

Toutefois, ce modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses, qu'il convient de discuter avant de le comparer à d'autres modèles défendus. Ceci nous permettra d'éclairer quelques directions de recherche potentielles.

### Isothermalité et adiabat self-similaire

Parmi ces hypothèses, nous sommes tout d'abord poussé à supposer l'isothermalité et l'auto-similarité du profil d'adiabat. Le second point, peut-être plus que le premier est discutable.

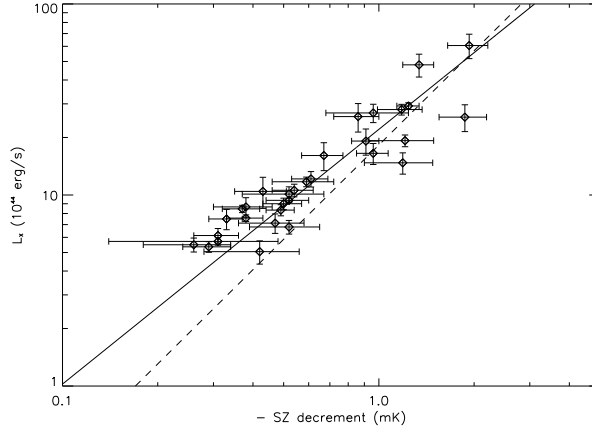


FIG. 7.3

Relation décrement SZ central - Luminosité X. La ligne continue représente la corrélation analytique prédite, utilisant les valeurs prédites pour  $Q_{SZ}$  et  $Q_X$ . La ligne pointillée correspond au meilleur ajustement (non physiquement motivé) trouvé par [41]. Les données ont été compilées par [40], et corrigées des effets de lobe.

Comme nous l'avons vu, un profil de brillance de surface plus plat dans les groupes (ou amas froid) est utilisé comme argument en faveur de l'existence d'un préchauffage [11] (même si une telle évolution est contestée par [42], ce qui illustre certainement la dépendance des résultats vis à vis de certaines options de l'analyse et nous rappelle donc la prudence avec laquelle certains résultats doivent être considérés). Le statut des simulations sur ce point n'est en fait guère plus clair puisque, par exemple, des simulations hydrodynamiques 1-D produisent des résultats contradictoires [20, 29], confirmant certaines observations pour les premiers, les infirmant et allant dans le sens de l'auto-similarité pour les autres. Plaident toutefois, en notre faveur, les mesures raffinées de [43], où ont été modélisées avec un plus grand soin certaines mesures initiales [11]. Certes, les profils de densité ne sont alors pas auto-similaires mais, étant donné que la température n'est pas constante, ceci n'empêche pas les profils d'adiabat d'être dans une bonne mesure auto-similaires, *i.e.* jusqu'à  $R = 0.25 r_v$  où les mesures ont encore un sens.

De toute évidence, seules de nouvelles observations pourraient permettre de trancher sur ce point. Toutefois, le succès de notre modèle plaide en faveur de cette auto-similarité, approximative bien sûr.

Néanmoins, afin de tester la robustesse de notre approche vis à vis de cette hypothèse et de l'isothermalité, nous avons considéré les résultats d'un modèle

semi-analytique physiquement motivé de profils d'amas [25]<sup>8</sup>, où les propriétés d'isothermalité et d'auto-similarité du profil d'adiabat ne sont pas imposées, même si elles apparaissent approximativement (ce qui conforte en soit nos choix). Comparant la quantité  $\Lambda_0 \int_V dV/K^3$  prédite et les observations de  $L_X/T^{7/2}$  (voir Eq. 7.12), nous constatons un très bon accord. Ainsi cette approche aux relations d'échelles observées est non seulement pertinente mais aussi robuste vis à vis de nos hypothèses clefs, qui ne sont nécessairement qu'approximatives. Ceci conforte également le fait que, de toute évidence, l'entropie constitue une observable clef des amas de galaxies.

### Autres modèles

Notre modèle n'est pas le seul proposé à ce jour : une comparaison avec d'autres s'impose alors. Tout d'abord, notons le fait que seul notre modèle s'appuie sur des arguments analytiques simples (même s'il fait appel à certaines relations calibrées sur des simulations numériques), par opposition aux modèles ayant recours souvent à des approches numériques plus lourdes.

Des modèles de chauffage externe ont été proposés [35, 32], mais de fait, ils ne parviennent à reproduire la relation  $L_X - T$  qu'au prix d'une injection d'entropie ( $\sim \ln K_0$ ) nettement supérieure aux valeurs observées (un facteur 3 au moins [43]). Ce désaccord vient du fait qu'ils considèrent des groupes isentropiques et non chauffés par les chocs, d'où la nécessité d'un apport d'entropie très important. Ceci indique un résultat secondaire important de notre modèle : *l'effet des chocs n'est probablement pas négligeable dans les groupes*.

Enfin, une étude comparative des scénarios de chauffage externe ou interne a été effectuée, étude numérique incluant une modélisation des flots de refroidissement (très approximative) [29]. L'excès d'entropie des amas semble persister dans le cadre des modèles de chauffage externe, même si le modèle de chauffage interne semble souffrir d'un injection d'énergie insuffisante des SNae compensée par une modification *ad-hoc* de la Fonction de Masse Initiale (IMF), c'est-à-dire par une augmentation artificielle du nombre de SNae. Notons sur ce point, qu'il ne peut dans tous les cas y avoir qu'un chauffage interne car, d'une part, le problème du sur-refroidissement ("overcooling" [23], voir introduction générale) persisterait alors, et d'autre part, il existe des évidences de chauffage externe à grand  $z$  dans les structures observées autour de galaxies. D'une manière générale, on ne peut probablement considérer des scénarios de chauffage exclusifs, mais seulement des modes de chauffage dominants.

### Autres horizons

De toute évidence, notre modèle ne peut-être qu'enrichi<sup>9</sup> par les observations futures, tant en X qu'en SZ, où les plus grands progrès sont attendus.

<sup>8</sup>En fait ce modèle est enrichi par rapport à celui présenté ici par le fait qu'il incorpore un modèle de conduction et une valeur d'entropie centrale (déduite d'un modèle d'évolution de l'entropie type [30]), d'où sont déduits des profils de pression, température et densité.

<sup>9</sup>La connaissance ne peut que s'accroître, seuls ses auteurs peuvent être ruinés...

Ce modèle se trouverait également enrichi par une modélisation des courants de refroidissement. La pertinence de la description des observations d'amas de galaxies au moyen de l'entropie, suggère qu'une description entropique de la formation des grandes structures - histoire dont les amas constitueraient les jalons - se révélerait certainement fructueuse.



# Bibliographie

- [1] S. Dos Santos and O. Doré. Competition between shocks and entropy floor : unifying groups and clusters of galaxies. *A&A in press*, 2001.
- [2] N. Kaiser. Evolution and clustering of rich clusters. *MNRAS*, 222 :323–345, September 1986.
- [3] J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *ApJ*, 490 :493+, December 1997.
- [4] G. L. Bryan and M. L. Norman. Statistical Properties of X-Ray Clusters : Analytic and Numerical Comparisons. *ApJ*, 495 :80+, March 1998.
- [5] V. R. Eke, J. F. Navarro, and C. S. Frenk. The Evolution of X-Ray Clusters in a Low-Density Universe. *ApJ*, 503 :569+, August 1998.
- [6] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptative mesh refinement. *soumis a Phys. Rev. D*, 2001.
- [7] M. Markevitch. The lx-t relation and temperature function for nearby clusters revisited. *ApJ*, 504 :27+, September 1998.
- [8] J.J. Mohr, B. Mathiesen, and A.E. Evrard. Properties of the intracluster medium in an ensemble of nearby galaxy clusters. *ApJ*, 517 :627–649, June 1999.
- [9] M. Arnaud and A. E. Evrard. The lx-t relation and intracluster gas fractions of x-ray clusters. *MNRAS*, 305 :631–640, May 1999.
- [10] S. F. Helsdon and T. J. Ponman. The intragroup medium in loose groups of galaxies. *MNRAS*, 315 :356–370, June 2000.
- [11] T. J. Ponman, D. B. Cannon, and J. F. Navarro. The thermal imprint of galaxy formation on x-ray clusters. *Nature*, 397 :135–137, 1999.
- [12] L.P. David, K.A. Arnaud, W. Forman, and C. Jones. Einstein observations of the Hydra A cluster and the efficiency of galaxy formation in groups and clusters. *ApJ*, 356 :32–40, June 1990.
- [13] N. Kaiser. Evolution of clusters of galaxies. *ApJ*, 383 :104–111, December 1991.
- [14] A.E. Evrard and J.P. Henry. Expectations for x-ray cluster observations by the rosat satellite. *ApJ*, 383 :95–103, December 1991.

- [15] A. Finoguenov and T. J. Ponman. Constraining the role of type ia and type ii supernovae in galaxy groups by spatially resolved analysis of rosat and asca observations. *MNRAS*, 305 :325–337, April 1999.
- [16] A. Finoguenov, L. P. David, and T. J. Ponman. An ASCA Study of the Heavy-Element Distribution in Clusters of Galaxies. *ApJ*, 544 :188–203, November 2000.
- [17] A. Pipino, F. Matteucci, and S. Borgani. Chemical Enrichment and Energetics of the ICM with Redshift. *to be published in "Chemical Enrichment of the ICM and the IGM" (Vulcano, Italy), ASP Conference Series*, 2001.
- [18] S. Inoue and S. Sasaki. Heating of the Hot Intergalactic Medium by Powerful Radio Galaxies and Associated High Energy Gamma-Ray Emission. *ApJ in press*, 2001.
- [19] S.F. Helsdon, T.J. Ponman, E. O’Sullivan, and D. A. Forbes. X-ray luminosities of galaxies in groups. *MNRAS*, 325 :693–706, August 2001.
- [20] P. A. Knight and T. J. Ponman. The properties of the hot gas in galaxy groups and clusters from 1d hydrodynamical simulations - i. cosmological infall models. *MNRAS*, 289 :955–972, August 1997.
- [21] G. Bryan. Explaining the entropy excess in clusters and groups of galaxies without additional heating. *soumis a ApJ Let.*, 2000.
- [22] K.K.S. Wu, A. C. Fabian, and P. E. J. Nulsen. Non-gravitational heating in the hierarchical formation of x-ray clusters. *MNRAS*, 318 :889–912, November 2000.
- [23] A. Blanchard, D. Valls-Gabaud, and G. A. Mamon. The origin of the galaxy luminosity function and the thermal evolution of the intergalactic medium. *A&A*, 264 :365–378, October 1992.
- [24] A.A. Thoul and D.H. Weinberg. Hydrodynamic simulations of galaxy formation. 1 : Dissipation and the maximum mass of galaxies. *ApJ*, 442 :480–491, April 1995.
- [25] S. Dos Santos. Linking cluster structure with IGM entropy evolution. *en preparation*, 2001.
- [26] R. Cen and G. L. Bryan. The Metal Enrichment and Temperature of the Intergalactic Medium. *ApJ Let.*, 546 :L81–L85, January 2001.
- [27] T. M. Tripp, B. D. Savage, and E. B. Jenkins. Intervening O VI Quasar Absorption Systems at Low Redshift : A Significant Baryon Reservoir. *ApJ Let.*, 534 :L1–L5, May 2000.
- [28] D. Reimers, R. Baade, H.-J. Hagen, and S. Lopez. High-resolution OVI absorption line observations at  $1.2 < z < 1.7$  in the bright QSO HE 0515-4414. *A&A*, 374 :871–877, August 2001.
- [29] F. Brighenti and W. G. Mathews. Entropy evolution in galaxy groups and clusters : a comparison of external and internal heating. *ApJ*, 553 :103–120, May 2001.

- [30] P. Valageas and J. Silk. The entropy history of the universe. *A&A*, 350 :725–742, October 1999.
- [31] A. Cavaliere, N. Menci, and P. Tozzi. Diffuse baryons in groups and clusters of galaxies. *ApJ*, 501 :493+, July 1998.
- [32] P. Tozzi and C. Norman. The evolution of x-ray clusters and the entropy of the intracluster medium. *ApJ*, 546 :63–84, January 2001.
- [33] R. Teyssier, R. Chièze, and J. Alimi. *ApJ*, 480 :36–, 1997.
- [34] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Course of theoretical physics, Oxford : Pergamon Press, 1959, 1959.
- [35] M. L. Balogh, A. Babul, and D. R. Patton. Pre-heated isentropic gas in groups of galaxies. *MNRAS*, 307 :463–479, August 1999.
- [36] A. E. Evrard. Formation and evolution of x-ray clusters - a hydrodynamic simulation of the intracluster medium. *ApJ*, 363 :349–366, November 1990.
- [37] R. Teyssier. PhD thesis, Université Paris VII, 1997.
- [38] C. S. Frenk, S. D. M. White, P. Bode, J. R. Bond, G. L. Bryan, R. Cen, H. M. P. Couchman, A. E. Evrard, N. Gnedin, A. Jenkins, A. M. Khokhlov, A. Klypin, J. F. Navarro, M. L. Norman, J. P. Ostriker, J. M. Owen, F. R. Pearce, U.-L. Pen, M. Steinmetz, P. A. Thomas, J. V. Villumsen, J. W. Wadsley, M. S. Warren, G. Xu, and G. Yepes. The santa barbara cluster comparison project : A comparison of cosmological hydrodynamics solutions. *ApJ*, 525 :554–582, November 1999.
- [39] A. Cavaliere and R. Fusco-Femiano. X-rays from hot plasma in clusters of galaxies. *A&A*, 49 :137–144, May 1976.
- [40] T. Zhang and X. Wu. A Comparison of Central Temperatures of the Intra-cluster Gas Determined from X-Ray and Sunyaev-Zeldovich Measurements. *ApJ*, 545 :141–144, December 2000.
- [41] A. R. Cooray. An SZ temperature decrement-X-ray luminosity relation for galaxy clusters. *MNRAS*, 307 :841–848, August 1999.
- [42] H. Roussel, R. Sadat, and A. Blanchard. The baryon content of groups and clusters of galaxies. *A&A*, 361 :429–443, September 2000.
- [43] E. J. Lloyd-Davies, T. J. Ponman, and D. B. Cannon. The entropy and energy of intergalactic gas in galaxy clusters. *MNRAS*, 315 :689–702, July 2000.

## Chapitre 8

# Distorsions gravitationnelles et effet Sunyaev-Zel'dovich : une analyse conjointe

Nous l'avons déjà évoqué dans la partie précédente, l'intérêt cosmologique des amas, tient, hormi leur statut d'objets les plus massifs gravitationnellement liés, à la possibilité d'observer à très grande échelle la complexe interaction entre baryon et matière noire, et à en déduire le cas échéant des indications sur la valeur de certains paramètres cosmologiques tels  $H_0$ , ou la fraction baryonique  $\Omega_b$ ,  $\Omega$ ,  $\sigma_8$ ...

Cette interaction découle naturellement de la composition des amas qui, constitués en masse de 80 % de matière noire, de 15 % d'un gaz baryonique (plasma chaud) et de 5% de matière galactique (poussière et étoiles), entraîne une grande richesse d'observations : observation du champ de distorsion gravitationnelle ou effet de lentille donnant accès à la masse totale projetée [1, 2], émission en X du gaz (ICM) [3], et observation de l'effet SZ dû à la diffusion Compton inverse des photons du CMB sur les électrons du plasma [4, 5, 6, 7], observation des galaxies, de leur champ de vitesse, de leur morphologie...

L'abondance et la qualité de ces observations s'accroissant au fil des progrès technologiques, nous disposons aujourd'hui d'observations précises de la distorsion gravitationnelle, de l'émission X mais aussi, progrès plus récent, du décrétement SZ [8, 9, 10]. Ceci est un fait. Mais le constater et constater sa richesse potentielle n'est rien, si l'on ne trouve les moyens de l'exploiter au mieux.

En proposant une méthode d'analyse conjointe des données WL, SZ et X, nous avons, en collaboration avec Yannick Mellier, François Bouchet et Romain Teyssier, taché d'avancer dans cette direction. Cette méthode originale a fait l'objet d'une publication [11] reproduite en annexe .6.

Avant d'exposer les principes généraux de cette méthode ainsi que des exemples d'application sur des simulations numériques dans les sections 8.2 et 8.3, nous commencerons dans la section 8.1 par détailler ses motivations en regard des méthodes appliquées jusqu'alors. Nous finirons dans la section 8.4 par discuter des limitations d'une telle approche et de ses extensions.

## 8.1 Motivations et nécessités

### De certains biais possibles affectant les mesures de $H_0$ et $f_b$

L'intérêt d'observations mettant en jeu des mécanismes physiques distincts, mais surtout, la difficulté potentielle de leur usage, peuvent-être aisément illustrés par l'exemple de la mesure de la constante de Hubble,  $H_0$ , à partir des observations SZ ou X.

Le principe de cette mesure est simple. L'émission de type "bremsstrahlung thermique" ("free-free") constituant le processus originel dominant du flux X observé (dans les gammes d'énergie nous intéressant ici), est un processus d'émission "à deux corps" ( $e^- + p \rightarrow e^- + p + \gamma$ ), aussi son intensité est-elle proportionnelle à  $n_e n_p = n_e^2$  (où l'on a utilisé l'électro-neutralité). La brillance de surface observée nous donne donc accès à la quantité  $L_X \propto \int n_e^2 T_e^{1/2} d\ell$  (où l'on a supposé une loi d'émissivité  $\propto T_e^{1/2}$ ). L'effet SZ, lui, trouve son origine dans la diffusion d'un rayonnement de fond incident par les électrons du plasma et constitue donc un processus à "un corps" dont l'intensité est proportionnelle à  $n_e$ . Aussi, l'intensité du signal intégré observé varie comme  $y \propto \int n_e d\ell$ . Schématiquement, le rapport de ces deux quantités,  $y/L_X^{(1/2)}$  nous donne accès à une longueur pondérée par la densité électronique  $\ell_{n_e}$ , pourvu que l'on suppose l'isothermalité. Toutefois, cette longueur pondérée  $\ell_{n_e}$  est une longueur le long de la ligne de visée. Par conséquent, si l'on veut faire usage du diamètre apparent  $\theta_a$  de l'amas et en déduire une mesure de la distance angulaire  $D_a(z)$ , où se cache la dépendance en  $H_0$ , il nous faut faire une hypothèse sur la géométrie de l'amas et son profil de densité électronique. En supposant, par exemple, sa sphéricité, on pourrait identifier la longueur transverse et la longueur le long de la ligne de visée, ce qui nous permettrait d'identifier  $D_a(z)\theta_a$  et  $\ell_{n_e} \propto y/L_X^{(1/2)}$  [12, 13, 7]. Ce principe est bien connu et a été largement appliqué, mais conduit à des résultats très dispersés.

Le fait est que cette approche, même si naturelle, souffre de biais importants [14, 15, 16, 17]. Comme nous l'avons vu, elle doit sa simplicité aux deux hypothèses clefs que sont l'isothermalité et la sphéricité, toutes deux pouvant être très approximatives en pratique <sup>1</sup>. Il a en effet été évalué que ces hypothèses pouvaient entraîner une erreur systématique comprise entre 15 % et 30 % lors de la mesure de  $H_0$ .

Notons que ce même type d'approche (et de biais) pourrait être également

---

<sup>1</sup> Cela pourrait sembler contredire la discussion du chapitre précédent, mais il faut se rappeler qu'alors, seule des quantités *intégrées* sur le volume étaient considérées.

illustré dans le contexte de la mesure de la fraction baryonique,  $f_b$ , à partir d'observations de champ de distorsions gravitationnelles par effet de lentilles, nous donnant accès à la masse projetée totale, et une observation du contenu baryonique telle l'émission en X [18, 19, 20].

De manière plus générale, ces deux exemples illustrent la difficulté que l'on rencontre à modéliser la structure spatiale d'un amas à partir de simples mesures de quantités projetées, ce que nous allons détailler ci-dessous.

## Difficultés génériques d'une déprojection

Cette difficulté est celle des *problèmes inverses* [21]. Elle est particulièrement importante en astrophysique par le simple fait que la grande distance qui nous sépare des objets qui nous intéressent rend impossible leur observation sous plusieurs angles. Si tel n'était pas le cas, on se retrouverait, par exemple, dans des situations proches de la tomographie où la connaissance de quantités intégrées selon plusieurs lignes de visée autorise (par l'usage de transformée de Radon inverse, par exemple) l'accès à la structure tri-dimensionnel de l'objet étudié. Cette situation est celle de l'imagerie médicale. L'observation d'amas de galaxies n'offre néanmoins pas cette facilité, aussi ces problèmes inverses sont simplement *singuliers* (non-inversibles, ou, autrement dit dégénérés, au sens où l'unicité de la solution est perdue) et leur solution nécessite donc une forme de régularisation <sup>2</sup>. Pour celle-ci, l'usage d'*a priori* sera particulièrement adéquat <sup>3</sup>. Ils peuvent être d'ordre physique (par exemple l'isothermalité), géométrique (par exemple l'axisymétrie) ou paramétrique (la distribution spatiale est caractérisée par certains paramètres ajustés directement sur l'image, *e.g.* les  $\beta$ -modèle [22]). Notons que cette dernière famille incorpore en général des hypothèses géométriques et physiques.

## Solutions proposées

L'actualité et l'intérêt de ce problème n'ont naturellement pas été sans stimuler le travail de plusieurs groupes qui ont proposé diverses réponses à ce problème de la coanalyse, et donc de la déprojection, considérée soit comme but en soi, soit comme moyen pour accéder à  $H_0$  par exemple. Ces approches se distribuent aisément parmi les trois classes établies ci-dessus.

Les mesures de  $H_0$  et  $f_b$  précédemment évoquées ont fait usage d'un  $\beta$ -modèle, isotherme et à géométrie sphérique ou elliptique. Il s'agit donc ici d'une "régularisation paramétrique", la plus simple.

Alternativement, il a été proposé une approche où le gaz est encore supposé isotherme, mais où la distribution de matière est axi-symétrique [23, 24, 25]. Toutefois, partant de ces mêmes hypothèses, deux procédures distinctes d'inversion ont été proposées. Un algorithme de *déprojection à plusieurs jeux de données de type Richardson-Lucy* [26, 27, 21] a été discuté dans [24], selon

<sup>2</sup>Nous insistons sur le fait que cette singularité est intrinsèque à la nature du problème, *i.e.* indépendant des contingences de la mesure génératrice de bruit...

<sup>3</sup>Ceci n'est évidemment pas sans rappeler le problème décrit au chapitre 4.

une procédure initialement élaborée pour la détermination de la structure 3-D des orbites stellaires [28, 29, 30]. Cet algorithme itératif incorpore de manière rigoureuse la notion d'*a priori* puisque sa dérivation est basé sur le théorème de Bayes, dont un usage intensif a été fait dans la partie précédente. Malheureusement, cette approche souffre de propriétés de convergences incertaines et ses résultats semblent en pâtir dans notre contexte. Il fait toutefois encore l'objet de travaux en cours.

Quand à eux, [23, 25] exploitent la simple relation entre transformée de Fourier (TF) de l'image projetée, et transformée de Fourier 3-D de l'objet, et s'autorisent, le cas échéant, à procéder à une interpolation dans le "cône d'ignorance"<sup>4</sup> Cette approche a donné des résultats intéressants sur des simulations, mais n'a pas encore été appliquée sur des données réelles.

Dans ce chapitre, nous ne développerons que les premiers pas vers une dé-projection complète. Notre ambition sera donc moindre (temporairement), mais elle sera surtout différente. Considérant uniquement des observations SZ et WL (les autres méthodes considèrent également l'émission en X comme donné), nous effectuerons une *prédiction* de l'émission en X, qui, par comparaison avec l'émission mesurée, nous permettra de valider ou non notre approche et de tester nos hypothèses physiques.

Dans un second temps, notre méthode pourrait supposer comme connu l'émission en X ce qui permettrait alors une dé-projection complète. Toutefois, il est important de séparer les deux objectifs distincts que son la modélisation 3-D d'un amas et la description adéquate des quantités intégrées telles la masse totale des baryons. Ce dernier sera celui poursuivi dans ce chapitre.

Par un développement perturbatif autour de situations sphériques (sphéroïdales) et un usage cohérent (dans un sens perturbatif) d'hypothèses physiques simples, nous tâcherons de nous libérer des hypothèses de symétries sphériques (sphéroïdales) et d'isothermalité.

## 8.2 Principes généraux

Supposant la donnée d'observations SZ et WL, nous tâcherons donc de répondre à la question : comment devons-nous les coanalyser ? Désirant effectuer une véritable coanalyse, et non pas une comparaison de deux analyses distinctes,

---

<sup>4</sup>Le "cône d'ignorance" [31] est une reformulation de la singularité du problème d'inversion dans le cas d'un système axi-symétrique. Ce nom provient du "théorème de Fourier des sections" ("Fourier slice theorem") qui stipule que les valeurs de la TF à 2-D de la projection sont égales à celles de la TF à 3-D dans un plan "section" perpendiculaire à la ligne de projection. Si, par chance, l'axe de symétrie appartient à ce plan section, alors une simple rotation autour de cet axe nous donnera accès aux valeurs de la TF dans tout le domaine de Fourier. Si, par contre, cet axe fait un angle  $\theta > 0$  avec le plan section, alors cette même rotation laissera un cône de demi-angle  $\theta$ , où la TF ne sera pas définie, d'où la nécessité d'une interpolation. Remarquons que cette difficulté fondamentale a limité l'usage de telles techniques dans le cadre de la distribution de galaxies, car il a été montré [32, 33] que des distributions physiquement intéressantes, *e.g.* de type disque, pouvaient se révéler complètement indéterminées. L'espoir de ces auteurs [23, 25] est que les amas de galaxies, dont la distribution est plus "douce", soient des systèmes plus favorables à ce type de méthode. Cet espoir semble avéré.

nous nous efforcerons d'utiliser les relations physiques entre ces grandeurs mesurées.

L'observation de l'effet SZ et des distorsions gravitationnelles nous donnant accès à la pression et au potentiel gravitationnel projetés, nous voudrions faire usage d'hypothèses (équation d'état, équilibre hydrostatique...) reliant ces quantités à 3-D pour combiner leur projection à 2-D. Malheureusement, ces relations 3-D n'ont aucune formulation utile à 2-D, *i.e.* nous ne possédons pas de relations de fermeture 2-D nous permettant de relier ces images. Notre méthode vise donc à construire de telles relations de fermeture au moyen d'une approche perturbative.

Nous rappellerons brièvement les hypothèses qui sous-tendent notre approche avant d'en expliciter le formalisme.

### Hypothèses générales et observations

Comme déjà discuté dans les deux chapitres précédents, nous assimilerons le plasma chaud et dilué constituant l'ICM à un gaz ( $g$ ) parfait à l'équilibre hydrostatique dans un potentiel de matière noire ( $DM$ ), ce qui nous permet d'écrire les trois relations suivantes :

$$P_g = \frac{\rho_g k_B T_g}{\mu_e m_p} \equiv \beta \rho_g T_g \quad (8.1-a)$$

$$\nabla(\rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \quad (8.1-b)$$

$$\nabla P_g = -\rho_g \nabla \Phi_{DM} . \quad (8.1-c)$$

Par ailleurs, l'amplitude du décrétement SZ est directement proportionnelle au paramètre de Comptonisation  $y$ , donné par

$$y = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl n_e k_B T_e = \alpha \int dl P_g . \quad (8.2-a)$$

L'amplitude du décrétement SZ est donc directement reliée à la pression du gaz intégrée.

Enfin, la détermination statistique du champ de distorsion  $\gamma$  affectant les images des galaxies d'arrière plan, nous permet, dans le cadre des lentilles faibles, de dériver le potentiel gravitationnel 3-D projeté,  $\phi_{DM} \propto \int \Phi_{DL} dl$ . Notons que nous considérons uniquement la contribution de la matière noire à ce potentiel.

### Principes

Supposons que les cartes observées, de paramètre  $y$  et de potentiel projeté  $\phi_{DM}$ , présentent une quasi-symétrie de rotation. Cette situation est celle de la plupart des observations actuelles, comme l'illustre la figure 8.1, et est naturelle, dans la mesure où l'on s'attend à ce que les amas relaxés soient sphéroïdaux. Supposons plus précisément que ces deux quantités s'écrivent

$$y(R, \varphi) = y_0(R) + \varepsilon y_1(R) m(\varphi) \quad (8.3-a)$$

$$\phi_{DM}(R, \varphi) = \phi_{DM,0}(R) + \varepsilon \phi_{DM,1}(R) n(\varphi) \quad (8.3-b)$$



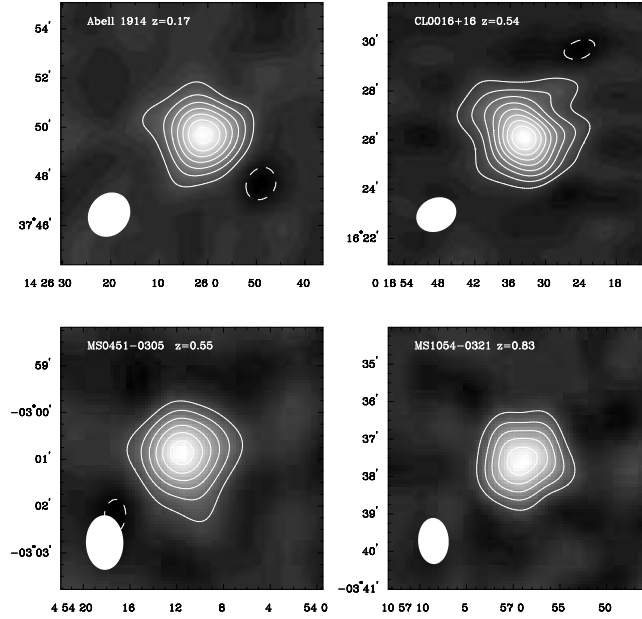


FIG. 8.1

Image de l'effet SZ observé dans 4 amas de galaxies à différents  $z$ . Les contours correspondent à 1.5 et 5 fois les niveaux de bruit. Ces données proviennent des interféromètres millimétriques OVRO et BIMA [34]. L'ellipse blanche en bas à gauche représente le lobe instrumental synthétique de chaque observation.

où  $\varepsilon \ll 1$ , où  $(R, \varphi)$  dénotent les coordonnées polaires dans le plan de l'image, et où  $m$  et  $n$  sont des fonctions particulières. Cette description signifie que ces images peuvent être décrites comme une perturbation autour d'images parfaitement circulaires, mais aussi que ces perturbations sont le produit d'une fonction radiale et angulaire. Bref, nos images sont circulaires à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , mais admettent une correction linéaire en  $\varepsilon$ .

Notre hypothèse clef consiste alors à supposer que cette *symétrie perturbée 2-D est représentative d'une symétrie perturbée à 3-D intrinsèque au système* ; autrement dit, que la distribution spatiale de l'amas peut être décrite adéquatement au moyen d'une symétrie sphérique perturbée linéairement.

Cette hypothèse suggère un *protocole naturel*. Soit une carte de  $y$  et de  $\phi_{DM}$ , nous commençons par en déduire des cartes (ou profils) de grandeur projetée au premier ordre  $(y_0(R), \phi_0(R))$  en moyennant sur des anneaux. Ces quantités d'ordre 0 servent de base pour construire des cartes d'ordre 0 de densité de gaz projetée,  $D_{g,0}(R)$ , et de température projetée,  $\zeta_{g,0}(R)$ . On considère ensuite les corrections d'ordre 1 en  $\varepsilon$  à ces termes symétriques  $(y_1(R)m(\varphi), \phi_1(R)m(\varphi))$  d'où l'on déduit des corrections d'ordre 1 pour le gaz et la température projetée :

$D_{g,1}(R, \varphi)$  et  $\zeta_{g,1}(R, \varphi)$ .

### Descriptions dans le cas circulaire

Nous allons maintenant détailler plus avant les fondements de ce protocole dans le cas circulaire, même si un tel formalisme s'applique également dans le cas d'une symétrie elliptique, comme cela sera discuté ci-dessous.

Dans un premier temps, et en toute généralité, la pression du gaz, la densité de gaz, la température du gaz et le potentiel gravitationnel peuvent s'écrire à 3-D de la manière suivante, dans l'hypothèse d'une symétrie sphérique linéairement perturbée :

$$\begin{cases} P_g(r, \theta, \varphi) &= P_{g,0}(r) + \varepsilon P_{g,1}(r)f(\theta, \varphi) \\ \rho_g(r, \theta, \varphi) &= \rho_{g,0}(r) + \varepsilon \rho_{g,1}(r)h(\theta, \varphi) \\ T_g(r, \theta, \varphi) &= T_{g,0}(r) + \varepsilon T_{g,1}(r)k(\theta, \varphi) \\ \Phi_{DM}(r, \theta, \varphi) &= \Phi_{DM,0}(r) + \varepsilon \Phi_{DM,1}(r)g(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (8.4)$$

où  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques centrées sur l'amas.

Dans un second temps, l'usage de *l'équilibre hydrostatique* (voir Eq. 8.1) implique

$$f(\theta, \varphi) = h(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi), \quad (8.5)$$

et conduit, au premier ordre en  $\varepsilon$ , au système

$$\begin{cases} P'_{g,0}(r) &= -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,0}(r) \\ P'_{g,1}(r) &= -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,1}(r) - \rho_{g,1}(r)\Phi'_{DM,0}(r) \\ P_{g,1}(r) &= -\rho_{g,0}(r)\Phi_{DM,1}(r). \end{cases} \quad (8.6)$$

De même, *l'équation d'état* écrite en Eq. 8.1 mène directement à

$$\begin{cases} P_{g,0}(r) &= \beta \rho_{g,0}(r)T_{g,0}(r) \\ P_{g,1}(r) &= \beta \rho_{g,1}(r)T_{g,0}(r) + \beta \rho_{g,0}(r)T_{g,1}(r). \end{cases} \quad (8.7)$$

Dans ce contexte, *les observations*, tant par effet SZ que par distorsions gravitationnelles, nous donne accès aux quantités projetées  $y(R, \varphi)$  et  $\phi_{DM}(R, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} y(R, \varphi) &= \alpha \int P_{g,0}(r)dl + \varepsilon \alpha \int P_{g,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \\ &\equiv y_0(R) + \varepsilon y_1(R)m(\varphi) \end{aligned} \quad (8.8-a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{DM}(R, \varphi) &= \int \Phi_{DM,0}(r)dl + \varepsilon \int \Phi_{DM,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \\ &\equiv \phi_{DM,0}(R) + \varepsilon \phi_{DM,1}(R)m(\varphi). \end{aligned} \quad (8.8-b)$$

Notons que les lettres capitales désignent les quantités à 2-D, alors que les lettres minuscules désignent les quantités 3-D, et que le système de coordonnées a été choisi de telle sorte que l'angle azimuthal à 2-D,  $\phi$  corresponde également à l'azimuth à 3-D.

### Détermination de la densité de gaz projetée au premier ordre en $\varepsilon$

Nous pouvons, tout d'abord, déterminer une carte de densité projetée à l'ordre 0 puis au premier ordre en  $\varepsilon$ . Une carte de température projetée serait obtenue de la même manière, mais nous ne le développerons pas ici, par souci de clarté. Nous définissons cette carte de densité de gaz projetée ainsi,

$$D_g(R, \varphi) = \int \rho_g(r, \varphi) dl \quad (8.9-a)$$

$$= \int \rho_{g,0}(r) dl + \varepsilon \int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (8.9-b)$$

$$\equiv D_{g,0}(R) + D_{g,1}(R, \varphi) \quad (8.9-c)$$

$$(8.9-d)$$

L'usage de transformées d'Abel [35] et des équations de l'équilibre hydrostatique conduit aux quantités d'ordre 0,

$$D_{g,0}(R) = -2 \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{P'_{g,0}(r)}{\Phi'_{DM,0}(r)} , \quad (8.10)$$

où l'on a

$$\Phi'_{DM,0}(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{r} \frac{R}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \phi''_0(R) dR , \quad (8.11)$$

et

$$\alpha P'_{g,0}(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{r} \frac{R}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} y''_0(R) dR . \quad (8.12)$$

*L'étape qui suit est le coeur de notre méthode.* Pour obtenir la corrections d'ordre 1,  $D_{g,1}(R, \varphi)$ , nous procédons de la manière suivante. Partant de l'équation (8.6), nous obtenons facilement,

$$\rho'_{g,0}(r) \Phi_{DM,1}(r) = \rho_{g,1}(r) \Phi'_{DM,0}(r) . \quad (8.13)$$

Aussi, on peut écrire,

$$D_{g,1}(R, \varphi) = \int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (8.14-a)$$

$$= \int \frac{\rho'_{g,0}(r)}{\Phi'_{DM,0}(r)} \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl . \quad (8.14-b)$$

Les observations ne nous donnent pas accès à l'intégrale du membre de gauche. Il faut donc la relier aux observations faites du potentiel gravitationnel projeté ou bien de la pression de gaz projeté. Nous choisirons ici d'utiliser les données SZ, mais un calcul analogue utilisant au contraire les données WL est possible. Ces observations SZ mesurent

$$y_1(R) m(\varphi) = \int P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl , \quad (8.15)$$

aussi nous choisissons de réécrire 8.14 par

$$\int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl = \int \frac{\rho'_{g,0}(r)}{P'_{g,0}(r)} P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (8.16-a)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} \int P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (8.16-b)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} y_1(R) m(\varphi) \quad (8.16-c)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} (y(R, \varphi) - y_0(R)) \quad (8.16-d)$$

où  $R$  correspond au rayon observé sur l'image et  $r$  est égal à la distance entre la ligne de visée et le centre de l'amas. A ce niveau, l'extraction de  $\rho'_{g,0}(r)/P'_{g,0}(r)$  de l'intégrale le long de la ligne de visée n'est possible que sous certaines conditions d'approximations. En [11], nous justifions plus en détail ce point, qui s'avère cruciale et raisonnable, comme cela sera vérifié par la suite. Brièvement, si l'on suppose l'isothermalité, alors le rapport  $\rho'_{g,0}/P'_{g,0}$  est constant, si bien que cette approximation est exacte. Plus généralement, elle serait également exacte si la ligne de visée suivait une courbe de rayon constant. Ceci n'est bien sûr pas le cas, mais se révèle être une approximation raisonnable de par la faible extension supposée des perturbations. Sa validité décroît toutefois avec  $R$ , puisque l'extension de la perturbation, de taille angulaire constante, augmente avec  $R$ .

À ce niveau, seules des quantités connues constituent le membre de droite, si bien que l'on peut effectivement en déduire  $D_{g,1}(R, \varphi)$ . Une même procédure permettrait de construire une carte de température projetée au premier et second ordre. L'absence d'isothermalité n'affecte donc pas notre formalisme, au moins en principe.

### Prédiction pour la brillance de surface

Mieux, une même approche nous permet d'effectuer des prédictions au premier ordre pour la brillance de surface en  $X$ . Elle est en effet définie par

$$S_X(E) = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \int n_e^2 \Lambda(E, T_e) dl \quad (8.17)$$

où  $\Lambda$  désigne comme dans le chapitre précédent, l'émissivité en  $X$  dans une bande d'énergie centrée en  $E$ . Supposant la connaissance de  $z$  et  $\Lambda$ , on peut donc écrire,

$$S_X(E) \propto \int n_e^2 T_e^{1/2} dl \quad (8.18-a)$$

$$\propto \int \rho_g^2 T_g^{1/2} dl \quad (8.18-b)$$

$$\begin{aligned}
& \propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl + 2 \varepsilon \int \rho_{g,0} T_{g,0}^{1/2} \rho_{g,1} f(\theta, \varphi) dl \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{-1/2} T_{g,1} f(\theta, \varphi) dl .
\end{aligned} \tag{8.18-c}$$

Si nous évaluons approximativement les intégrales du membre de droite comme discutées précédemment, nous obtenons

$$\begin{aligned}
S_X(E) & \propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl \\
& + 2 \varepsilon \rho_{g,0}(R) T_{g,0}^{1/2}(R) \int \rho_{g,1} f(\theta, \varphi) dl \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_{g,0}^2(R) T_{g,0}^{-1/2}(R) \int T_{g,1} f(\theta, \varphi) dl
\end{aligned} \tag{8.19-a}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl + 2 \varepsilon \rho_{g,0}(R) T_{g,0}^{1/2}(R) D_{g,1}(R, \varphi) \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_{g,0}^2(R) T_{g,0}^{-1/2}(R) \zeta_{g,1}(R, \varphi) ,
\end{aligned} \tag{8.19-b}$$

où les termes d'ordre 0,  $\rho_{g,0}$  et  $T_{g,0}$ , mais aussi les termes d'ordre 1,  $D_{g,1}$  et  $\zeta_{g,1}$  ont été préalablement déduits. Cette dernière équation nous montre que nous savons dériver de manière cohérente une prédiction X des cartes de quantité projetée dérivé au préalable.

Ce dernier calcul explicite donc comment la brillance de surface en X peut-être déduite des observations SZ et WL. Nous allons, dans la section suivante, démontrer la validité de ce formalisme, en ayant recours à des simulations numériques.

### 8.3 Validation sur des simulations numériques

Afin de démontrer l'efficacité d'une telle méthode nous avons utilisé les résultats du code RAMSES. Cette oeuvre de Romain Teyssier met à profit les hautes performances des techniques algorithmiques de type "grille adaptative" ("Adaptative Mesh Refinement" ou AMR en anglais) pour réaliser des simulations cosmologiques, N-corps plus hydrodynamiques, à haute résolution (résolution formelle de  $12 h^{-1} \text{kpc}$  dans le coeur des amas) [36, 37]. D'une simulation d'un univers  $\Lambda$ -CDM, un amas relaxé de masse  $4.50 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ <sup>5</sup> a été extrait à  $z = 0.0$ . Les observables d'intérêt, soit des cartes de densité projetée, d'émission en X et de paramètre de Comptonization  $y$  ont été déterminées, et tracées sur la figure 8.2 (cartes 1,2,3). Chacune de ces cartes, d'une largeur de  $3.5 h^{-1} \text{Mpc}$ , a été convoluée par une Gaussienne de largeur  $120 h^{-1} \text{kpc}$ , mais est exempte de bruit.

Par simplification, nous avons considéré  $T_g$  constant, *i.e.* un gaz isotherme, bien qu'ait été constatée une variation de la température d'un facteur 2 entre le rayon de viriel et le centre [37].

---

<sup>5</sup> Masse de viriel définie par  $\delta_{334}$  dans cette cosmologie.

Sous cette hypothèse, l'approximation évoquée ci-dessus est exacte pour le calcul de  $D_{g,1}$  (Eq. 8.16) sans l'être pour le calcul de  $S_X$  (Eq. 8.19). L'application du formalisme précédemment décrit, conduit à la prédiction de la carte de mesure d'émission  $X$  aux premier et second ordres (cartes 4, 5 et 6). L'accord avec la simulation est excellent. Le coefficient de corrélation entre ces deux cartes est de 0.978, et les flux totaux diffèrent de seulement 0.9 %.

Ce résultat apporte une bonne crédibilité à notre approche et valide nos hypothèses. Certes, le cas considéré n'est pas le plus défavorable que l'on puisse concevoir, et des exemples moins favorables, au sens où les perturbations sont plus importantes (à savoir, faiblement décroissante avec  $R$ ), conduisent à des résultats sensiblement moins bons au premier ordre, ce qui est attendu. Mais ce formalisme constitue dans tous les cas un progrès certain par rapport à la simple symétrie sphérique.

## 8.4 Accomplissement, limites et perspectives

### Accomplissement

Dans ce chapitre, une méthode originale de coanalyse cohérente de différentes observations a été présentée. Elle a été illustrée dans la situation particulière où, se donnant des observations SZ et WL, on désire en déduire une prédiction pour la carte d'émissivité en  $X$ , ceci nous permettant alors de tester la compatibilité de ces observations et des hypothèses que l'on utilise pour les décrire.

Validée sur des simulations numériques, elle semble très prometteuse et constitue un progrès certain par rapport aux techniques appliquées jusqu'alors. Elle devrait contribuer efficacement à diminuer certains biais affectant la mesure de la constante de Hubble ou de la fraction baryonique.

Dès lors, notre désir est, de l'appliquer à d'authentiques observations. Ce travail est actuellement en cours et l'amas victime est Abel 2029 (amas très proche  $z = 0.08$ ), pour lequel nous disposons d'une reconstruction de masse à partir de distorsions gravitationnelles dans le régime des lentilles faible [38], d'observations en  $X$  du satellite ROSAT [39], mais aussi de mesures du décrément SZ au moyen de l'interféromètre CBI [40]. Ce projet devrait être très prochainement activement poursuivi.

Néanmoins, avant de commencer cet excitant travail, il convient d'examiner une fois encore, critiquement, nos hypothèses.

### Hypothèses

Notre hypothèse centrale consiste à supposer la pertinence d'un développement perturbatif au premier ordre avec une séparation entre parties radiale et angulaire. Elle est donc double. Le faible écart à la sphéroïdalité est attendu et observé pour des structures relaxées tant dans la réalité que dans les simulations numériques. De fait également, cette séparation entre partie angulaire et partie radiale est constatée dans les structures relaxées, à tel point que notre

expérience nous montre qu'elle pourrait quasiment être regardée comme une condition de relaxation. Notons que l'équilibre hydrostatique seul impose ensuite que les parties angulaires soient identiques pour toutes les composantes. Par ailleurs, un amas accrétant du gaz le long d'un filament présentera ce type de structure.

Néanmoins, cette description rend impossible la reconstruction de toute caractéristique aiguë dans la distribution spatiale de l'amas, tels les chocs. Ce fait est à rapprocher de notre choix d'utiliser le SZ et d'en déduire une prédiction X, plutôt que le contraire. De fait, l'effet SZ, étant sensible à la pression, est insensible à de telles structures, car la pression y présente en général un gradient très faible (par comparaison aux variations de densité ou de température, comme cela est le cas au passage d'un choc [41])<sup>6</sup>. Les observations SZ se prêtent donc particulièrement bien à notre approche et, naturellement, moins piquées au centre que les mesures en X, décrivent mieux les ailes des amas. Ce choix ne nous permet cependant pas de profiter de la résolution supérieure des observations X.

Il convient également de remarquer que l'hypothèse d'isothermalité que l'on a effectuée lors de notre travail sur les simulations numériques, hypothèse fautive à un facteur 2 près, ne nous a pas empêché de décrire avec une grande précision le flux X total. A ceci, deux raisons. Tout d'abord, la région centrale ( $\sim 0.1r_v$ ) où l'émission X est centrée possède un gradient de température moindre que le facteur 2 entre le centre et le rayon de viriel. Ensuite, la dégénérescence générique affectant ce type de problème, déjà mentionnée dans l'introduction à cette partie, n'est pas complètement levée. À un profil approximatif peut correspondre une description globale du flux projetée plus précise. Une telle difficulté nécessiterait des études quantitatives supplémentaires qui dépassent le cadre de ce travail. Toutefois, le point essentiel est que la description du contenu baryonique total soit sensiblement améliorée, diminuant ainsi les biais importants, ayant motivé, entre autres, notre étude.

Enfin, nous n'avons considéré qu'une situation idéale où aucun bruit n'est présent, ce qui nous facilite l'usage de transformées d'Abel. En pratique, il est connu que celles-ci peuvent être délicates à calculer en présence de bruit<sup>7</sup>, ce qui rendrait la détermination des profils 3-D plus hasardeuse. Une approche paramétrique développée dans un autre contexte [42], plus générale que les  $\beta$ -modèle, pourrait alors se révéler efficace. L'avantage de cette approche est que les paramètres ou coefficients de la base de fonctions décrivant les profils à 3-D (ici des "splines") sont ajustés directement sur l'image de leur projection, ce qui rend la procédure moins sensible au bruit.

---

<sup>6</sup>Ceci peut se concevoir aisément si l'on écrit l'équation de conservation du moment, ou équation d'Euler,  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$ . Le fait que le gradient de pression apparaisse comme un terme source implique que, même si ce terme était important à un moment donné, il aura tendance à décroître.

<sup>7</sup>En particulier par la sensibilité de la transformée à la dérivée au centre.

## Perspectives

Comme nous l'avons précédemment décrit, ce travail est une première étape vers une déprojection complète, pour laquelle on se donnerait également une carte d'émissivité en X. Son esprit pourrait être le suivant. Soit une perturbation, faible, dont on se donne une taille angulaire et l'azimuth. Si l'on suppose que cette perturbation possède une quasi-symétrie axiale, alors seul reste indéterminé l'angle spécifiant la position ("en profondeur") de cet axe puisqu'il est fixé azimuthalement. Sa détermination pourrait être faite, par exemple, par simple minimisation de  $\chi^2$  en utilisant conjointement observations X, SZ et WL. Ceci serait donc dans l'esprit de [25], où la faisabilité d'une telle approche a été démontrée, mais serait sensiblement plus général, puisque serait tolérées des perturbations à l'axi-symétrie. Nous tenons là une de nos pistes de recherches actuelles, laquelle s'accompagne également du ré-examen de l'approche alternative que constitue l'utilisation des algorithmes de type Richardson-Lucy.

Après l'étude du contenu baryonique d'Abel 2029, la description de sa structure 3-D sera vraisemblablement une de nos voies de recherche.

Notons que notre formalisme pourrait également s'écrire convenablement au moyen d'une décomposition des images dans la base des polynômes d'Hermite introduite récemment dans un contexte proche [43, 44]. Cette alternative à l'intérêt de permettre un contrôle analytique des erreurs.

Enfin, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre, à l'analyse d'observations d'amas *individuels*. Utilisant les grands relevés présents ou à venir (PLANCK, MEGACAM, XMM, ROSAT, etc.), il sera possible d'avoir *une approche statistique* à la coanalyse des données SZ, WL et X. Afin de développer des méthodes statistiques adéquates, nous avons, en collaboration avec Sergio Dos Santos (Leicester University, UK) et Julien Devriendt (Oxford University, UK), produit des cartes simulées d'observations SZ, WL et X, d'une même région du ciel. Ceci se fait au moyen d'une approche semi-analytique, qui nous permet de rajouter une composante baryonique (gaz uniquement) dans les simulations à N-corps de matière sombre (Tree Code de Stéphane Ninin). De telles cartes ( $3.1 \times 3.1 \text{ deg.}^2$ ), préliminaires, sont reproduites sur la figure 8.3. Des corrélations de ce type permettraient, entre autres, d'estimer la fraction baryonique et son évolution, d'évaluer l'effet des lentilles gravitationnelles sur le CMB [45], d'évaluer certains termes dominant du bispectre des fluctuations de température [46, 47, 48] (voir chapitre 5) ce qui est crucial si l'on veut évaluer le bispectre des fluctuations primaires, de mesurer le chauffage non-gravitationnel (voir chapitre 7). Le développement de telles méthodes est toujours en cours.



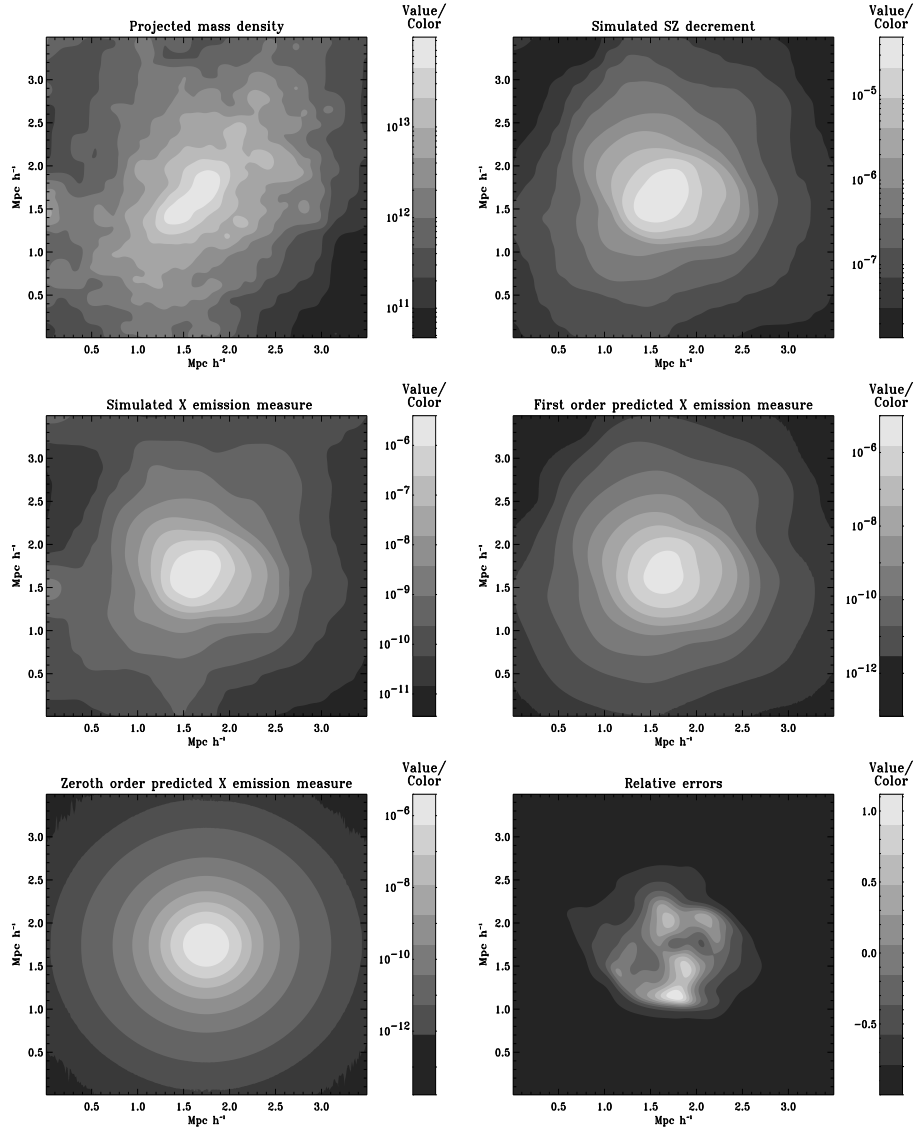


FIG. 8.2

Les figures 1,2 et 3 (numérotées de haut en bas et de gauche à droite) montrent les résultats de simulations. Y sont représentés avec une échelle de couleur logarithmique, la densité de masse projetée ( $M_{\odot} \text{ Mpc}^{-2}$ ), la mesure d'émission en X ( $\text{cm}^{-6} \text{ Mpc}$ ) et le paramètre SZ  $y$ . Cet amas est un bon candidat pour notre approche car il exhibe un coeur circulaire et des perturbations environnantes et serait donc mal décrit par une ajustement d'ellipse. Les figures 4, 5 et 6 représentent, avec une échelle logarithmique, la mesure d'émission à l'ordre 1 (la mesure à l'ordre 0 plus la correction linéaire), cette même mesure à l'ordre 0, et, avec une échelle linéaire, une carte des erreurs relatives, *i.e.* (prédiction - simulation)/simulation pour la mesure d'émission X en utilisant une échelle linéaire. Les 10 contours d'erreurs sont linéairement séparés entre -1.0 et 1. Chaque boîte a une largeur de  $3.5 h^{-1} \text{ Mpc}$ . Le coefficient de corrélation entre la prédiction et la simulation est 0.978 . Les flux totaux diffèrent seulement de 0.91%, aussi, même si les erreurs relatives augmentent avec  $R$ , l'erreur totale demeure faible de par la grande dynamique en jeu.

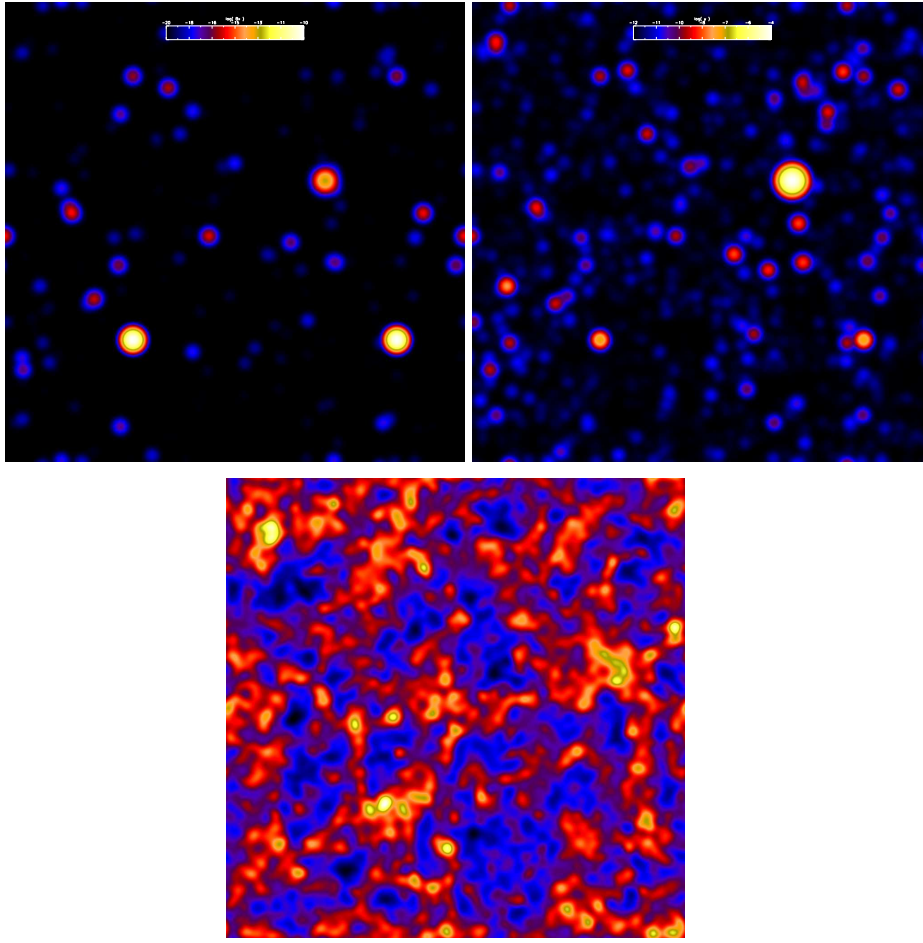


FIG. 8.3

Les deux images du haut montrent des cartes simulées du ciel tel qu'observé en X (carte de gauche) et par effet SZ (carte de droite). La circularité des amas visibles tient à notre modélisation du gaz. La carte du bas représente la convergence,  $\kappa$ , projetée (le plan source est à  $z = 1$ ). Celle-ci étant calculé directement sur la simulation de matière sombre, elle ne souffre pas de notre approche "circularisante". Les différences entre ces cartes témoignent de la différente sensibilité de ces processus au profil du gaz, mais aussi à la distance. Elles s'expliquent, plus généralement, par un jeu entre masse et distance. Par exemple, l'effet SZ ne souffrant pas de l'effet de dilution cosmique permet d'observer plus de structures lointaines que les X. Moins piqué au centre, il rend également visible la partie externe des amas. Enfin, la dépendance de  $\kappa$  en fonction de  $z$  est un peu plus complexe, mais la comparaison entre ces 3 images permet de la deviner.

# Bibliographie

- [1] Y. Mellier. Probing the Universe with Weak Lensing. *ARA&A*, 37 :127–189, 1999.
- [2] M. Bartelmann and P. Schneider. Weak gravitational lensing. *submitted to Physics Report*, *astro-ph/9912508*, 2000.
- [3] C. L. Sarazin. *X-ray emission from clusters of galaxies*. Cambridge Astrophysics Series, Cambridge : Cambridge University Press, 1988.
- [4] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. *AP&SS*, 4 :301, 1969.
- [5] R. A. Sunyaev and I. B. Zel'dovich. The observation of relic radiation as a test of the nature of x-ray radiation from the clusters of galaxies. *Comments Astrophys. Space Phys.*, 4 :173–178, 1972.
- [6] Y. Rephaeli. Comptonization of the cosmic microwave background : The sunyaev-zel'dovich effect. *ARA&A*, 33 :541–580, 1995.
- [7] M. Birkinshaw. The sunyaev-zeldovich effect. *Phys.Rept.*, 310 :97–195, 1999.
- [8] F.-X. Desert, A. Benoit, S. Gaertner, J.-P. Bernard, N. Coron, J. Delabrouille, P. de Marcillac, M. Giard, J.-M. Lamarre, B. Lefloch, J.-L. Puget, and A. Sirbi. Observations of the Sunyaev-Zel'dovich effect at high angular resolution towards the galaxy clusters A665, A2163 and CL0016+16. *New Astronomy*, 3 :655–669, November 1998.
- [9] E. D. Reese, J. J. Mohr, J. E. Carlstrom, M. Joy, L. Grego, G. P. Holder, W. L. Holzappel, J. P. Hughes, S. K. Patel, and M. Donahue. Sunyaev-Zeldovich Effect-derived Distances to the High-Redshift Clusters MS 0451.6-0305 and CL 0016+16. *ApJ*, 533 :38–49, April 2000.
- [10] J. E. Carlstrom, M. K. Joy, L. Grego, G. P. Holder, W. L. Holzappel, J. J. Mohr, S. Patel, and E. D. Reese. Imaging the Sunyaev-Zel'dovich effect. *Physica Scripta Volume T*, 85 :148–155, 2000.
- [11] O. Doré, F. R. Bouchet, Y. Mellier, and R. Teyssier. Cluster physics from joint weak gravitational lensing and Sunyaev-Zel'dovich data. *A&A*, 375 :14–24, August 2001.
- [12] J.E. Gunn, M.S. Longair, and M.J. Rees, editors. *Observational Cosmology*, 1978.

- [13] J. Silk and S. D. M. White. The determination of  $Q_0$  using X-ray and microwave observations of galaxy clusters. *ApJ Let.*, 226 :L103–L106, December 1978.
- [14] Y. Inagaki, T. Sugihara, and Y. Suto. Reliability of the Hubble-Constant Measurement Based on the Sunyaev-Zel'dovich Effect. *PASJ*, 47 :411–423, August 1995.
- [15] K. Roettiger, J.M. Stone, and R.F. Mushotzky. Systematic Errors in the Hubble Constant Based upon Measurement of the Sunyaev-Zeldovich Effect. *ApJ*, 482 :588+, June 1997.
- [16] M. E. Sulkanen. Galaxy Cluster Shapes and Systematic Errors in  $H_0$  Measured by the Sunyaev-Zeldovich Effect. *ApJ*, 522 :59–65, September 1999.
- [17] D. Puy, L. Grenacher, P. Jetzer, and M. Signore. Asphericity of galaxy clusters and the Sunyaev-Zel'dovich effect. *A&A*, 363 :415–424, November 2000.
- [18] W. L. Holzapfel, M. Arnaud, P. A. R. Ade, S. E. Church, M. L. Fischer, P. D. Mauskopf, Y. Rephaeli, T. M. Wilbanks, and A. E. Lange. Measurement of the Hubble Constant from X-Ray and 2.1 Millimeter Observations of Abell 2163. *ApJ*, 480 :449+, May 1997.
- [19] L. Grego, J.E. Carlstrom, Reese E.D. Joy M.K., Holder G.P., Patel S., Cooray A.R., and Holzapfel W.L. The sunyaev-zel'dovich effect in abell 370. *ApJ*, 539 :39, 2000.
- [20] L. Grego, J. E. Carlstrom, E. D. Reese, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, M. K. Joy, J. J. Mohr, and S. Patel. Galaxy Cluster Gas Mass Fractions from Sunyaev-Zeldovich Effect Measurements : Constraints on  $\Omega_M$ . *ApJ*, 552 :2–14, May 2001.
- [21] L.B. Lucy. Astronomical Inverse Problems. *Reviews of Modern Astronomy*, 7 :31–50, 1994.
- [22] A. Cavaliere and R. Fusco-Femiano. X-rays from hot plasma in clusters of galaxies. *A&A*, 49 :137–144, May 1976.
- [23] S. Zaroubi, G. Squires, Y. Hoffman, and J. Silk. Deprojection of Rich Cluster Images. *ApJ Let.*, 500 :L87–+, June 1998.
- [24] K. Reblinsky. Cluster deprojection combining multiple observable data sets. *A&A*, 364 :377–390, December 2000.
- [25] S. Zaroubi *et al.* . Deprojection Galaxy Cluster X-ray, Sunyaev-Zel'dovich Temperature Decrement and Weak Lensing Mass Maps. *soumis a ApJ Let.*, 2000.
- [26] W.H. Richardson. Bayesian-based iterative method of image restoration. *Optical Society of America Journal*, 62 :55–59, 1972.
- [27] L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *ApJ*, 79 :745+, June 1974.

- [28] J. J. Binney, R. L. Davies, and G. D. Illingworth. Velocity mapping and models of the elliptical galaxies ngc 720, ngc 1052, and ngc 4697. *ApJ*, 361 :78–97, September 1990.
- [29] W. Dehnen and O. E. Gerhard. Three-integral models of oblate elliptical galaxies. *MNRAS*, 261 :311–336, March 1993.
- [30] W. Dehnen and O. E. Gerhard. Two-Integral Models for Oblate Elliptical Galaxies with Cusps. *MNRAS*, 268 :1019+, June 1994.
- [31] G. B. Rybicki. Deprojection of galaxies - how much can be learned. In *IAU Symp. 127 : Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, volume 127, pages 397+, 1987.
- [32] C. S. Kochanek and G. B. Rybicki. Deprojection of axially symmetric objects. *MNRAS*, 280 :1257–1263, June 1996.
- [33] O. E. Gerhard and J. J. Binney. On the deprojection of axisymmetric bodies. *MNRAS*, 279 :993+, April 1996.
- [34] G.P. Holder and J.E. Carlstrom. The Sunyaev-Zeldovich Effect as Microwave Foreground and Probe of Cosmology. In *ASP Conf. Ser. 181 : Microwave Foregrounds*, pages 199+, 1999.
- [35] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p., 1987.
- [36] A. Refregier and R. Teyssier. Numerical and Analytical Predictions for the Large-Scale Sunyaev-Zel'dovich Effect. *soumis a Phys. Rev. D*, 2000.
- [37] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptative mesh refinement. *soumis a Phys. Rev. D*, 2001.
- [38] B. Ménard *et al.* . *en préparation*, 2001.
- [39] F. Magnard *et al.* . *en préparation*, 2001.
- [40] F. Udomprasert *et al.* . *en préparation*, 2001.
- [41] R. Teyssier. PhD thesis, Université Paris VII, 1997.
- [42] F. Durret, D. Gerbal, C. Lobo, and C. Pichon. The rich cluster of galaxies ABCG 85. IV. Emission line galaxies, luminosity function and dynamical properties. *A&A*, 343 :760–774, March 1999.
- [43] A. Refregier. Shapelets : I. A Method for Image Analysis. *soumis a MNRAS*, 2001.
- [44] A. Refregier and D. Bacon. Shapelets : II. A Method for Weak Lensing Measurements. *soumis a MNRAS*, 2001.
- [45] L. Van Waerbeke, F. Bernardeau, and K. Benabed. Lensing Effect on the Relative Orientation between the Cosmic Microwave Background Ellipticities and the Distant Galaxies. *ApJ*, 540 :14–19, September 2000.
- [46] D. Spergel and D. Goldberg. . *Phys. Rev. D*, 59 :103001, 1999.
- [47] D. Goldberg and D. Spergel. . *Phys. Rev. D*, 59 :103002, 1999.
- [48] A. Cooray and W. Hu. Imprint of Reionization on the Cosmic Microwave Background Bispectrum. *ApJ*, 534 :533–550, May 2000.

# Conclusions

Fort de “prédictions” et d’observations jusqu’alors en très bon accord avec le paradigme cosmologique actuel, les expériences de mesure du CMB, présentes ou futures, ambitionnent de *tester ce paradigme* avec une précision inégalée. De cette ambition découlent des problèmes d’**analyse de données** inédits. À différents de ces problèmes, nous avons apportés quelques réponses :

- nous avons proposé, dans le chapitre 2, un *algorithme multi-grille de fabrication rapide de cartes*, et avons démontré son efficacité sur des exemples simulés ;
- nous avons exposé, dans le chapitre 3, *une extraction du spectre de puissance par une décomposition hiérarchique* ;
- nous avons modélisé analytiquement les effets systématiques dus à *un lobe instrumental elliptique*, dans le chapitre 4 ;
- dans le chapitre 5, nous avons défini et démontré la sensibilité d’une statistique à une composante *non-Gaussienne*.

Ces réponses sont partielles. De multiples problèmes demeurent, et continueront certainement à émerger au fil des progrès instrumentaux. Aussi, ce domaine d’activité reste le lieu d’une partie de nos activités de recherche. Il n’est pas évident que la non-Gaussianité, présente à toutes les étapes de cette analyse, soit adéquatement traitée. Il fait peu de doute que la richesse des données attendues, polarisées ou non, ne se récoltera qu’au prix d’un contrôle plus serré encore des effets systématiques et des émissions d’avant-plan.

Dans un second temps, nous nous sommes concentré sur la description physique **des amas de galaxies**, entrant ainsi dans des régimes hautement non-linéaires.

- Prenant acte de certains défauts des modèles existants, nous avons développé, au chapitre 7, *un modèle analytique incorporant un chauffage non-gravitationnel externe* ; des confrontations précises aux observations semblent supporter ce modèle ;
- enfin, les progrès observationnels récents permettent désormais diverses observations (SZ, X, WL) d’un amas. Nous avons proposé, au cours du chapitre 8, une voie permettant d’effectuer *une analyse conjointe* de

ces observations. La description du contenu baryonique des amas en est améliorée.

Ici encore, les progrès observationnels laissent entrevoir des observations toujours plus abondantes et précises. S'y confrontant, les modèles devront s'affiner. La venue de catalogues d'amas d'une abondance sans précédent (XMM, PLANCK, ROSAT, SDSS, Megacam, etc.) appelle clairement de nouvelles investigations. Nous y contribuerons.

*Paris, le 02 novembre 2001*

## **Troisième partie**

# **Publications**





## .1 Fabrication rapide de cartes

O.Doré, F.R. Bouchet, R. Teyssier, D. Vibert, S. Prunet

*A fast iterative multi-grid map-making algorithm for CMB experiments*

**Astronomy and Astrophysics 374, 358-370 (2001)**



A&A 374, 358–370 (2001)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:20010692  
 © ESO 2001

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## MAPCUMBA: A fast iterative multi-grid map-making algorithm for CMB experiments

O. Doré<sup>1</sup>, R. Teyssier<sup>1,2</sup>, F. R. Bouchet<sup>1</sup>, D. Vibert<sup>1</sup>, and S. Prunet<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institut d’Astrophysique de Paris, 98bis, Boulevard Arago, 75014 Paris, France

<sup>2</sup> Service d’Astrophysique, DAPNIA, Centre d’Études de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>3</sup> CITA, McLennan Labs, 60 St George Street, Toronto, ON M5S 3H8, Canada

Received 21 December 2000 / Accepted 2 May 2001

**Abstract.** The data analysis of current Cosmic Microwave Background (CMB) experiments like BOOMERanG or MAXIMA poses severe challenges which already stretch the limits of current (super-) computer capabilities, if brute force methods are used. In this paper we present a practical solution for the optimal map making problem which can be used directly for next generation CMB experiments like ARCHEOPS and TopHat, and can probably be extended relatively easily to the full PLANCK case. This solution is based on an iterative multi-grid Jacobi algorithm which is both fast and memory sparing. Indeed, if there are  $N_{\text{tod}}$  data points along the one dimensional timeline to analyse, the number of operations is of  $\mathcal{O}(N_{\text{tod}} \ln N_{\text{tod}})$  and the memory requirement is  $\mathcal{O}(N_{\text{tod}})$ . Timing and accuracy issues have been analysed on simulated ARCHEOPS and TopHat data, and we discuss as well the issue of the joint evaluation of the signal and noise statistical properties.

**Key words.** methods: data analysis – cosmic microwave background

### 1. Introduction

As cosmology enters the era of “precision”, it enters simultaneously the era of massive data sets. This has in turn showed the need for new data processing algorithms. Present and future CMB experiments in particular face some new and interesting challenges (Bond et al. 1999). If we accept the now classical point of view of a four steps data analysis pipeline: i) from *time-ordered data* (TOD) to maps of the sky at a given frequency, ii) from frequency maps to (among others) a temperature map, iii) from a temperature map to its power spectrum  $C_\ell$ , iv) from the power spectrum to cosmological parameters and characteristics of the primordial spectrum of fluctuation, the ultimate quantities to be measured in a given model. The work we are presenting focuses on the first of these issues, namely the map-making step.

Up to the most recent experiments, maps could be made by a brute force approach that aims to solve directly a large linear problem by direct matrix inversion. Nevertheless the size of the problem, and the required computing power, grows as  $\mathcal{O}(N_{\text{pix}}^3)$ , and the limits of this kind of method have now been reached (Borrill 2000) (even if the  $\mathcal{O}(N_{\text{pix}}^2)$  scaling of a preconditioned conjugate gradient is actually the appropriate scaling for map-making only). Whereas the most efficient development

in this massive computing approach, i.e. the MADCAP package (Borrill 1999) has been applied to the recent BOOMERanG and MAXIMA experiments (de Bernardis et al. 2000; Hanany et al. 2000) some faster and less consuming solutions based on iterative inversion algorithms have now been developed and applied too (Prunet et al. 2000). This is in the same spirit as (Wright et al. 1996), and we definitely follow this latter approach.

Design goals are to use memory sparingly by handling only columns or rows instead of full matrixes and to increase speed by minimising the number of iterations required to reach the sought convergence of the iterative scheme. We fulfill these goals by an iterative multi-grid Jacobi algorithm. As recalled below, an optimal method involves using the noise power spectrum. We have thus investigated the possibility of a joint noise (and signal) evaluation using this algorithm.

Section 2 presents in detail the method and its implementation, while Sect. 3 demonstrates its capabilities by using simulations of two on-going balloon CMB experiments, ARCHEOPS<sup>1</sup> (Benoit et al. 2000) and TopHat<sup>2</sup>. The results are discussed in Sect. 4, together with the problem of the evaluation of the noise properties, as well as possible extensions.

<sup>1</sup> <http://www-crtbt.polycnrs-gre.fr/archeops/>

<sup>2</sup> <http://topweb.gsfc.nasa.gov/>

Send offprint requests to: O. Doré, e-mail: [dore@iap.fr](mailto:dore@iap.fr)

## 2. The method

### 2.1. Optimal map making

The relation between the sky map we seek and the observed data stream may be cast as a linear algebra system (Wright et al. 1996; Tegmark 1997; Bond et al. 1998). Let  $t$  and  $p$  indices denote quantities in the temporal and spatial domains, and group as a data vector,  $d_t$ , and a noise vector the temporal stream of collected data and the detector noise stream, both of dimension  $N_{\text{tod}}$ . We then have

$$d_t = A_{tp} x_p + n_t, \quad (1)$$

where  $A_{tp} x_p$  is the signal vector given by the observation of the unknown pixelised sky map,  $x_p$ , which has been arranged as a vector of dimension  $N_{\text{pix}}$ . The  $N_{\text{tod}} \times N_{\text{pix}}$  “observation” matrix  $A$  therefore encompasses the scanning strategy and the beam pattern of the detector.

In the following, we restrict the discussion to the case when the beam pattern is symmetrical. We can therefore take  $x_p$  to be a map of the sky which has already been convolved with the beam pattern, and  $A$  only describes how this sky is being scanned. For the total power measurement (i.e. non-differential measurement) we are interested in here, the observation matrix  $A$  then has a single non-zero element per row, which can be set to one if  $d$  and  $x$  are expressed in the same units. The model of the measurement is then quite transparent: each temporal datum is the sum of the pixel value to which the detector is pointing plus the detector noise.

The map-making step then amounts to best solve for  $x$  given  $d$  (and some properties of the noise). We shall seek a linear estimator of  $x_p$ ,

$$\hat{x}_p = W_{pt} d_t. \quad (2)$$

To motivate a particular choice of the  $N_{\text{pix}} \times N_{\text{tod}}$  matrix  $W$ , a Bayesian approach is convenient. Indeed we are seeking the optimal solution to this inversion problem which maximises the probability of a deduced set of theory parameters (here the map  $x_p$ ) given our data ( $d_t$ ) by maximising  $\mathcal{P}(x|d)$ . Bayes’ theorem simply states that

$$\mathcal{P}(x|d) = \frac{\mathcal{P}(d|x)\mathcal{P}(x)}{\mathcal{P}(d)}. \quad (3)$$

If we *do not assume any theoretical prior*, then  $x$  follows a uniform distribution as well as  $d$ . Therefore,

$$\mathcal{P}(x|d) \propto \mathcal{P}(d|x). \quad (4)$$

If we further assume that *the noise is Gaussian*, we can write

$$\mathcal{P}(x|d) \propto \exp(-n_t^T N_{tt}^{-1} n_t / 2) \quad (5)$$

$$\propto \exp(-(d - Ax)_t^T N_{tt}^{-1} (d - Ax)_t / 2) \quad (6)$$

$$\propto \exp(-\chi^2 / 2) \quad (7)$$

where  $N_{tt} = \langle n n^T \rangle_{tt}$  is the noise covariance matrix. In this particular case, maximising  $\mathcal{P}(x|d)$  amounts to find

the least square solution which was used to analyse the COBE data (Jansen & Gulkis 1992),

$$W = [A^T N^{-1} A]^{-1} A^T N^{-1}. \quad (8)$$

In this paper we will actually deal only with this estimator. Nevertheless as a next iteration in the analysis process, we could incorporate various theoretical priors by making  $\mathcal{P}(x)$  more explicit. For example, it is often assumed a *Gaussian prior* for the theory, i.e.  $\mathcal{P}(x) \propto \exp(-x_p^T C_{pp}^{-1} x_p / 2)$  where  $C_{pp'} = \langle x_p x_{p'}^T \rangle$  is the signal covariance matrix. In that case the particular solution turns out to be the Wiener filtering solution (Zaroubi et al. 1995; Bouchet & Gispert 1996; Tegmark & Efstathiou 1996; Bouchet & Gispert 1998):

$$W = [C^{-1} + A^T N^{-1} A]^{-1} A^T N^{-1}. \quad (9)$$

However this solution may always be obtained by a further (Wiener) filtering of the priorless maximum likelihood solution, and we do not consider it further.

The prior-less solution demonstrates that as long as the (Gaussian) instrumental noise is not white, a simple averaging (co-addition) of all the data points corresponding to a given sky pixel is not optimal. If the noise exhibits some temporal correlations, as induced for instance by a low-frequency  $1/f$  behavior of the noise spectrum which prevails in most CMB experiments, one has to take into account the full time correlation structure of the noise. Additionally, this expression demonstrates that even if the noise has a simple time structure, the scanning strategy generically induces a non-trivial correlation matrix  $[A^T N^{-1} A]^{-1}$  of the noise map.

Even if the problem is well posed formally, a quick look at the orders of magnitude shows that the actual finding of a solution is a non trivial task. Indeed, a brute force method aiming at inverting the full matrix  $[A^T N^{-1} A]^{-1}$ , an operation scaling as  $\mathcal{O}(N_{\text{pix}}^3)$ , is already hardly tractable for present long duration balloon flights as MAXIMA, BOOMERanG, ARCHEOPS or TopHat where  $N_{\text{tod}} \sim 10^7$  and  $N_{\text{pix}} \sim 10^5$ . It appears totally impractical for PLANCK since for a single detector (amid 10s)  $N_{\text{tod}} \sim 10^9$  and  $N_{\text{pix}} \sim 10^7$ !

One possibility may be to take advantage of specific scanning strategies, and actually solve the inverse of the convolution problem as detailed in Wandelt & Gorski (2000). This amounts to deducing the map coefficients  $a_{lm}$  in the spherical harmonic basis through a rotation of a Fourier decomposition of the observed data. The map will then be a simple visualisation device, while the  $a_{lm}$  would be used directly for a component separation (as in Bouchet & Gispert 1996; Tegmark & Efstathiou 1996; Bouchet & Gispert 1998) and the CMB power spectrum estimate. While potentially very interesting, this approach will not be generally applicable (at least efficiently), and we now turn to a practical (general) solution of Eq. (2) by iterative means.

## 2.2. Practical implementation for large data sets

We solve the map-making problem by adapting to our particular case the general “multi-grid method” (Press et al. 1992). Multi-grid methods are commonly used to speed up the convergence of a traditional relaxation method (in our case the Jacobi method, as in Prunet et al. 2000 defined at resolution  $\ell_{\max}$  (see below). A set of recursively defined coarser grids ( $\ell < \ell_{\max}$ ) are used as temporary computational space, in order to increase the convergence rate of the relaxation process. To be fully profitable, this algorithm implies for each resolution both a rebinning in space (resolution change) and in time (resampling).

In this paper, we use the HEALPix pixelisation of the sphere (Górski et al. 1998). In this scheme, the sphere is covered by 12 basic quadrilaterals, further divided recursively into pixels of equal area. The map resolution is labeled by  $N_{\text{side}}$ : the number of pixels along the side of one basic quadrilateral. Hence,  $N_{\text{side}} = 1$  means that the sphere is covered by 12 large pixels only. The number of pixels is given by  $N_{\text{pix}} = 12N_{\text{side}}^2$ .  $N_{\text{side}} = 256$  corresponds to a pixel size of 13.7 arcmin. For practical reasons, we need to define the *resolution*  $k$  of a HEALPix map as

$$N_{\text{side}} = 2^k. \quad (10)$$

The “nested” pixel numbering scheme of HEALPix (Górski et al. 1998) allows an easy implementation of the coarsening ( $k \rightarrow k-1$ ) and refining ( $k \rightarrow k+1$ ) operators that we use intensively in our multigrid scheme.

We now discuss the details of our implementation and of the exact system we solve, the way we solve it and the actual steps of the multi-grid algorithm.

### 2.2.1. Determining the working resolution $k_{\max}$

The timeline is given by  $d = A_{\infty}x_{\infty} + n$  where  $x_{\infty}$  is the sky map at “infinite” resolution ( $k = +\infty$  in our notations). We aim at solving for the optimal map  $\hat{x}_k$  at a given finite spatial resolution  $k$  using

$$A_k^T N^{-1} A_k \hat{x}_k = A_k^T N^{-1} d, \quad (11)$$

where  $A_k$  is the “observation” operator (from spatial to temporal domain) and  $A_k^T$  is the “projection” operator (from temporal to spatial domain). In a noise-free experiment, the optimal map would be straightforwardly given by the co-added map (introducing the “co-addition” operator  $P_k$ )

$$\hat{x}_k = P_k d \equiv (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T d. \quad (12)$$

In order to check the accuracy of this trivial noise-free map making, it is natural to compute the residual *in the time domain* with  $n = 0$

$$p_k = A_k \hat{x}_k - d = A_k \hat{x}_k - A_{\infty} x_{\infty} \quad (13)$$

which will be non-zero in practice, as soon as one works with finite spatial resolution. We call this residual the *pixelisation noise*. Since we assume here that the instrumental beam is symmetric, the sky map is considered as the

true sky convolved by, say, a Gaussian beam of angular diameter  $\Delta\theta_B$ . This introduces a low-pass spatial filter in the problem. In other words, as the resolution increases, the pixelisation noise should decrease towards zero. We evaluate the order of magnitude of the pixelisation noise this way:

$$\|p_k\| \simeq \left\| \frac{\Delta x}{\Delta\theta} \right\|_{\infty} \Delta\theta_k \quad (14)$$

$$\leq \frac{\|x\|_{\infty}}{\Delta\theta_B} \Delta\theta_k \quad (15)$$

where  $\Delta\theta_k$  is the typical pixel width at resolution  $k$  and  $\|x\|_{\infty}$  is the signal norm. This formula is an evaluation of the maximal variation of the signal visible on a beam size. The norms used in the above formula can be either the maximum over the time line (a very strong constraint) or the variance over the time line (a weaker constraint). Since the pixelisation noise is strongly correlated with the sky signal (the more the signal varies, the higher this noise), point sources or Galaxy crossings are potential candidates for large and localised bursts of pixelisation noise. The correct working resolution  $k_{\max}$  is set by requiring that the pixelisation noise remains low compared to the actual instrumental noise, or equivalently

$$\Delta\theta_B \leq \frac{\Delta\theta_{k_{\max}}}{S/N}. \quad (16)$$

Note however that the pixelisation noise is strongly non Gaussian (point sources or Galaxy crossings) and can be always considered as a potential source of residual stripes in the final maps.

### 2.2.2. The basic relaxation method: An approximate Jacobi solver

Instead of solving for  $\hat{x}$  we perform the change of variable

$$\hat{y} = \hat{x} - P d \quad (17)$$

and solve instead for  $\hat{y}$  which obeys

$$P N^{-1} A \hat{y} = P N^{-1} (d - A P d) \quad \text{or} \quad M \hat{y} = b \quad (18)$$

where we have multiplied each side of Eq. (11) by  $(A^T A)^{-1}$ , the pixel hit counter. From now on, we also assume that the noise in the timestream is stationary and that its covariance matrix is normalised so that  $\text{diag } N_{tt}^{-1} = I$ . The previous change of variable allows us to subtract the sky signal from the data: since we have chosen a resolution high enough to neglect the pixelisation noise, we have indeed  $A P d \simeq A_{\infty} x_{\infty} + A P n$  and, consequently,  $d - A P d \simeq n - A P n$ . The map making consists of two steps: first to compute a simple co-added map from the time line, and second, to solve Eq. (18) for the *stripes map*  $\hat{y}$ . The final optimal map is obtained by adding these two maps.

It is worth mentioning that the stripes map is completely independent of the sky signal, as soon as the pixelisation noise can be ignored. It depends only on the scanning strategy through the matrix  $A$  and on the noise

characteristics through the matrix  $N$ . Even if in principle this change of variable is irrelevant since it does not change the matrix to be inverted, it does so in practice since  $d - APd$  is free from the fast variations of  $d$  (up to the pixelisation noise), as e.g. the Galaxy crossings, which are numerically damaging to the quality of the inversion.

To solve for Eq. (18), we follow the ideas of Prunet et al. (2000) and apply an approximate Jacobi relaxation scheme. The Jacobi method consists in the following relaxation step to solve for our problem

$$\hat{y}^{n+1} = R\hat{y}^n + D^{-1}b \quad \text{and} \quad \hat{y}^0 = 0 \quad (19)$$

where  $D$  is the diagonal part of the matrix  $M$  and  $R$  is the residual matrix  $R = I - D^{-1}M$ . Computing the diagonal elements of  $M = PN^{-1}A$  is rather prohibitive. The idea of Prunet et al. (2000) is to approximate  $D \simeq I$  by neglecting the off-diagonal elements of  $N^{-1}$ . The residual matrix then simplifies greatly and writes

$$R = P(I - N^{-1})A. \quad (20)$$

The approximate Jacobi relaxation step is therefore defined as

$$\hat{y}^{n+1} = R\hat{y}^n + b \quad \text{and} \quad \hat{y}^0 = 0. \quad (21)$$

One clearly sees that if this iterative scheme converges, it is towards the full solution of Eq. (18). To perform these successive steps, it is extremely fruitful to remember the assumed stationarity of the noise. Indeed whereas this assumption implies a circulant noise covariance matrix in real space, it translates in Fourier space in the diagonality of the noise covariance matrix. This is naturally another formulation of the convolution theorem, since a stationary matrix acts on a vector as a convolution, and a diagonal matrix acts as a simple vector product, thus a convolution in real space is translated as a product in Fourier space. The point is that the manipulation of the matrix  $N^{-1}$  is considerably lighter and will henceforth be performed in Fourier space. Applying the matrix  $R$  to a map reduces then to the following operations in order to:

1. “Observe” the previous stripes map  $\hat{y}^n$ ;
2. Fourier transform the resulting data stream;
3. Apply the low-pass filter  $W = I - N^{-1}$ ;
4. Inverse Fourier transform back to real space;
5. Co-add the resulting data stream into the map  $\hat{y}^{n+1}$ .

Assuming that the normalised noise power spectrum can be approximated by  $P(f) = 1 + (f_0/f)^\alpha$ , the low-pass filter associated to each relaxation step is given by

$$W(f) = \frac{f_0^\alpha}{f_0^\alpha + f^\alpha}. \quad (22)$$

Since both  $A$  and  $P$  are norm-preserving operators, the norm of the increment  $\Delta\hat{y}^n = \hat{y}^n - \hat{y}^{n-1}$  between step  $n$  and  $n+1$  decreases as  $\|\Delta\hat{y}^{n+1}\| \leq W(f_{\min})\|\Delta\hat{y}^n\|$ , where  $f_{\min}$  is a minimal frequency in the problem. Since  $W(f_{\min}) < 1$ , we see that the approximate Jacobi relaxation scheme will converge in every case, which is good

news. On the other hand, since  $W(f_{\min}) \simeq 1$ , the actual convergence rate of the scheme is likely to be very, very slow, which is bad news (cf. Fig. 6 for a graphical illustration). The fact that this algorithm is robust, but dramatically slow is a well-known property of the Jacobi method. The multi-grid method is also well known to solve this convergence speed problem. Note that if the convergence is reached, the solution we get is the optimal solution, i.e. similar to the one that would be obtained by a full matrix inversion up to round-up errors.

### 2.2.3. Multigrid relaxation

The multi-grid method for solving linear problems is described in great detail in Press et al. (1992). At each relaxation step at level  $k = k_{\max}$ , our target resolution, we can define the error  $e_k^n = \hat{y}_k^n - \hat{y}_k$  and the residual  $r_k^n = M_k\hat{y}_k^n - b_k$ . Both are related through

$$M_k e_k^n = r_k^n. \quad (23)$$

If we are able to solve exactly for Eq. (23), the overall problem is solved. The idea of the multi-grid algorithm is to solve approximately for Eq. (23) using a coarser “grid” at resolution  $k-1$ , where the relaxation scheme should converge faster. We thus need to define a fine-to-coarse operator, in order to define the new problem on the coarse grid and solve for it. We also need a coarse-to-fine operator in order to inject the solution onto the fine grid. The approximation to the error  $e_k^n$  is finally added to the solution. The coarse grid solver is usually applied after a few iterations on the fine level have been performed (in practice we perform 3 to 5 iterations). Naturally, since the solution to the problem on the coarse level relies also on the same relaxation scheme, it can be itself accelerated using an even coarser grid. This naturally leads to a recursive approach of the problem.

We defined our fine-to-coarse operator to be an averaging of the values of the 4 fine pixels contained in each coarse pixel. The coarse-to-fine operator is just a straight injection of the value of the coarse pixel into the 4 fine pixels. The most important issue is the temporal rebinning of the data stream, since the speed of the iterative scheme at a given level is actually set by the two Fourier transforms. We performed that resampling by simply taking one point out of two each time we go up one level. At the lower resolutions, this reduction is such that the iteration cost is negligible when compared to that at higher  $k$ ; it allows fast enough iterations that full convergence may be reached. In practice, we choose a minimal level  $k=3$  defined by  $N_{\text{side}}=8$  and iterate a few hundred times to reach exact convergence.

Finally, the navigation through levels allows several options to be taken. Either we go up and down through all the levels successively (the so-called “V-cycle”) or we follow more intricate paths (e.g. the “W-cycle”) where at a given level we go down and up all the lower levels before going up and vice-versa). Since it turns out that levels are relatively disconnected in the sense that the scales well

solved at a given resolution are only slightly affected by the solution at a higher level, the “V-cycle” is appropriate and is the solution we adopt in the two following configurations.

### 3. Practical application to ARCHEOPS and TopHat experiments

We now aim at demonstrating the capabilities of this algorithm with simulated data whose characteristics are inspired by those of the ARCHEOPS and TopHat experiments.

#### 3.1. Simulation

The ARCHEOPS and TopHat experiments are very similar with respect to their scanning strategy. Indeed both use a telescope that simply spins at a constant rate (respectively 3 and 4 RPM) about its vertical axis. Thus due to Earth rotation the sky coverage of both is performed through scan circles whose axis slowly drifts on the sky. Nevertheless, because of the different launch points (respectively on the Arctic circle (Kiruna, Sweden) and in Antarctica (McMurdo)) and their different telescope axis elevation (respectively  $\sim 41^\circ$  or  $12^\circ$ ) they do not have the same sky coverage.

Otherwise the two experiments do not use the same bolometers technology, the same bands or have the same number of bolometers. But even if we try to be fairly realistic, our goal though is *not* to compare their respective performances but rather to demonstrate two applications of our technique in different settings. We then simulate for each a data stream of  $\sim 24$  hrs duration with respectively a sampling frequency of 171 and 64 Hz. The TODs contain realistic CMB and Galactic signal for a band at 143 GHz. Note that this is a one day data stream for TopHat (out of 10 expected) and that this frequency choice is more appropriate for ARCHEOPS than for TopHat (whose equivalent band is around 156 GHz), but this is realistic enough for our purpose. We generated a Gaussian noise time stream with the following power spectrum:  $P(f) \propto (1 + (f_{\text{knee}}/f)^\alpha)^{-1}$  with  $f_{\text{knee}} = 0.24$  and 1 Hz, and  $\alpha = 1.68$  and 1. The noise amplitude per channel is chosen so that it corresponds for ARCHEOPS (24 hours) and TopHat<sup>3</sup> (10 days of flight) to  $30/8 \mu\text{K}$  on average per  $20'$  pixel, with a beam *FWHM* of  $10'/20'$ . Note that we restrict ourselves arbitrarily to shorter timeline that the method could handle in principle for time saving reason only. In principle the method could possibly deal with the full timeline at once (see below for memory issue discussion in Sect. 4.2) for the two experiments but we restrict ourselves on purpose to mere demonstrative examples.

We introduced 5 distinct levels of resolution defined by their  $N_{\text{side}}$  parameter in the HEALPix package (Górski et al. 1998). The highest resolution level is imposed by the

pixelisation noise level requirement (Sect. 2.2.3) to  $N_{\text{side}} = 256$  (pixel size  $\sim 13.7'$ ) whereas the lowest one is  $N_{\text{side}} = 8$  (pixel size  $\sim 7.3^\circ$ ). Therefore these two configurations each offer an interesting test since they differ by the sky coverage and the noise power spectrum. We iterate 3 times at each level except at the lowest one where we iterate 100 times.

#### 3.2. Results

The algorithm is equally efficient in both situations. Whereas for ARCHEOPS (whose timeline is longer due to the higher sampling frequency) it took 2.25 hours on a SGI ORIGIN 2000 single processor, it took around 1.5 hours for the TopHat daily data stream.

In Figs. 1 and 2 we depict from top to bottom and from left to right the initial co-added data, the reconstructed noise map, the hit map, i.e. the number of hits per pixel at the highest resolution, the initial signal map as well as the reconstructed signal map and the error map. We see that the destriping is excellent in both situations and the signal maps recovered only contain an apparently isotropic noise. We note the natural correlation between the error map and the hit map. Finally, we stress that no previous filtering at all has been applied.

As an illustration of how our multi-grid work method works, Fig. 3 shows how the noise map is reconstructed at various scales.

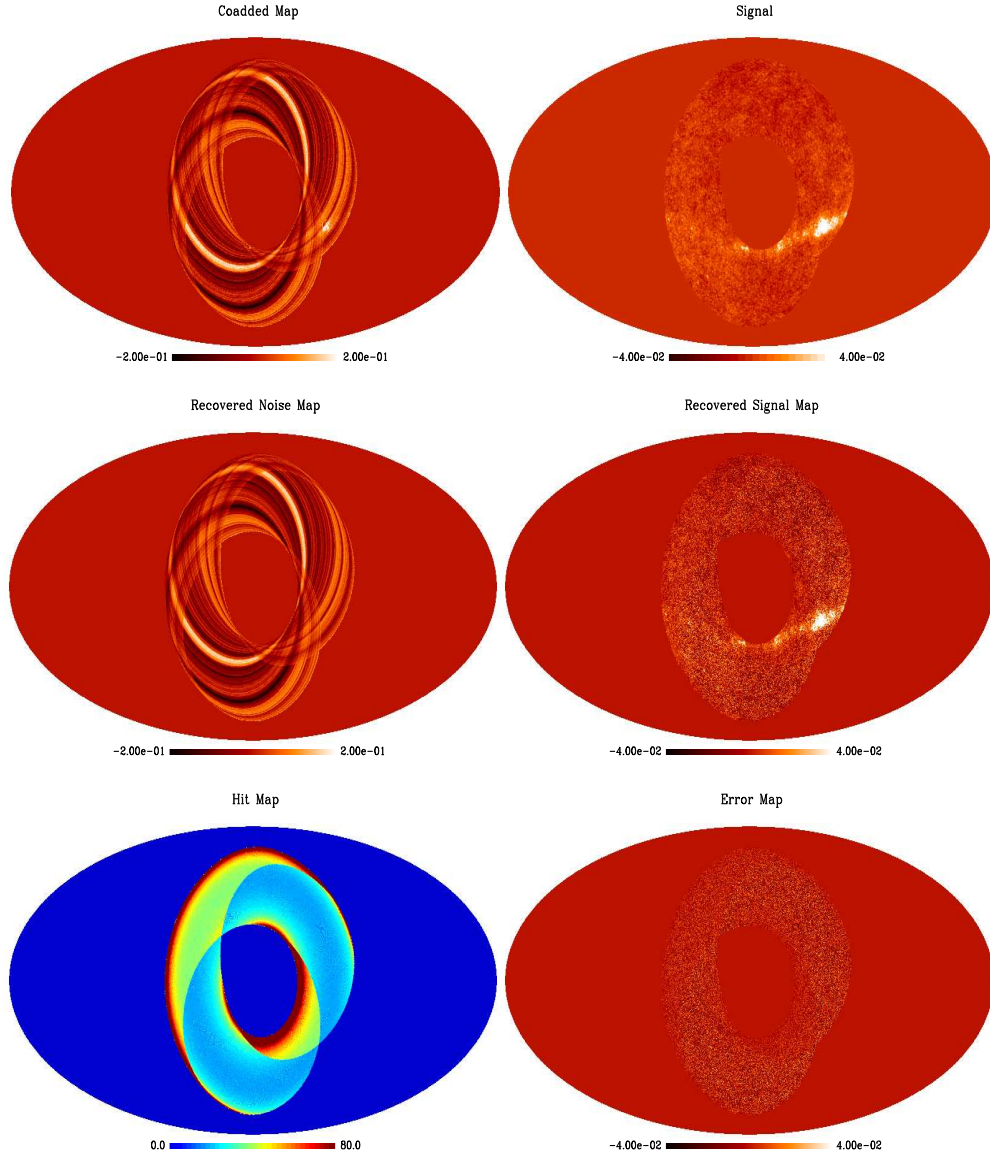
#### 3.3. Tests

In this section, we present some tests we carried out to validate our method. First, as was stated below, as soon as the iterative algorithm converges, the solution is by construction the optimal solution, similar to the one that would be obtained by the full matrix inversion. As a criterion for convergence we required the 2-norm of residuals to be of the order of the machine accuracy.

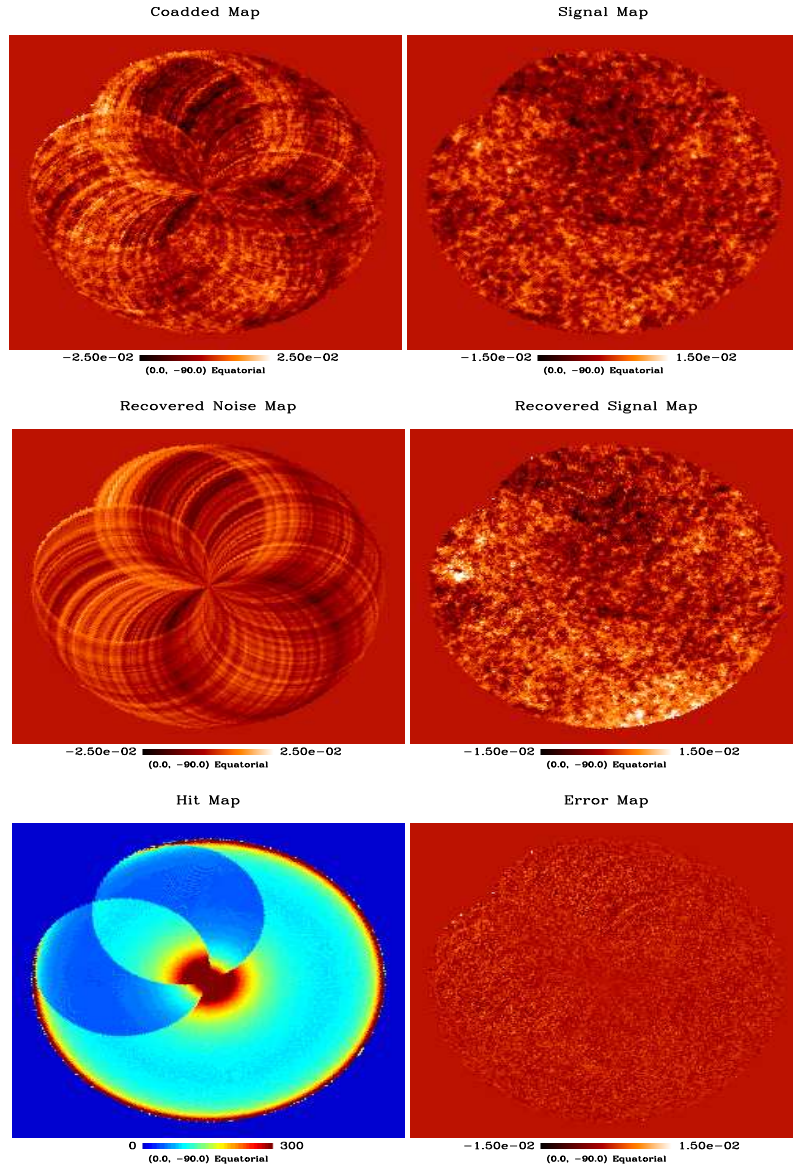
We initially have a Gaussian random noise stream fully characterised by its power spectrum. Therefore an important test is to check whether the deduced noise stream (by “observing” the stripe map, see Sect. 4.3 for further details) is Gaussian and has the same power spectrum. In Fig. 4 we ensure that the evaluated noise time stream is indeed Gaussian. As depicted in Fig. 5, where we plot in the ARCHEOPS case both the analytical expression of the spectrum according to which we generate the timeline and its recovered form, the agreement is excellent. We recall that we assumed at the beginning a perfect knowledge of the noise in order to define the filters. This is naturally unrealistic but the issue of noise evaluation is discussed in Sect. 4.3 below. We plotted as well the probability distribution function (PDF) of the final error map, i.e. the recovered noisy signal map minus the input signal map (Fig. 4). This PDF is well fitted by a Gaussian whose parameters are given in Fig. 4. The PDF of the error map displays some non-Gaussian wings. Let us recall that this

<sup>3</sup> Lloyd Knox private communication.

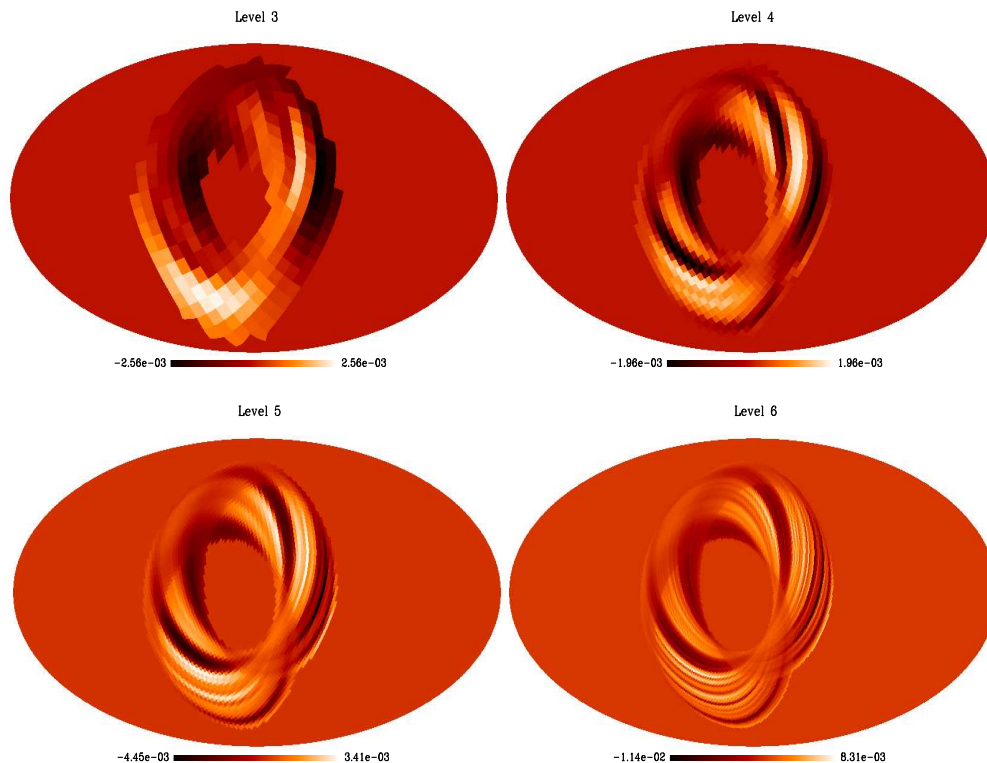




**Fig. 1.** Simulated ARCHEOPS Kiruna flight: from top to bottom and from left to right, the co-added map and the input Galactic + CMB signal map, the reconstructed noise (stripes) and signal maps, the hit count and the error map (Arbitrary unit). The fact that the coverage is not fully symmetrical is due to the fact that we considered slightly less than 24 hr. Mollweide projection with pixels of  $13.7'$  (HEALPix  $N_{\text{side}} = 256$ ). Arbitrary units.



**Fig. 2.** Simulated TopHat one day flight: from top to bottom and from left to right, the co-added map and the input CMB + Galaxy signal map, the reconstructed noise (or stripes) and signal map, the hit count and error map. The fact that the coverage is not fully symmetrical is due to the fact that we consider only 18.2 hr of flight. Gnomonic projection with pixel of  $13.7'$  (HEALPix  $N_{\text{side}} = 256$ ). Note that the slight visible striping is correlated to the incomplete rotation pattern that we *arbitrary* chose. Arbitrary units.



**Fig. 3.** Multi-grid noise map recovery: in this plot we show in the ARCHEOPS Kiruna case how the noise map is reconstructed at various levels, corresponding respectively to  $N_{\text{side}} = 8, 16, 32, 64$ .

is no surprise here because of the non-uniform sky coverage as well as the slight residual striping, both due to the non-ideal scanning strategy, i.e. that produces a non-uniform white noise in pixel space.

Another particularly important test consists in checking the absence of correlation between the recovered noise map and the initial signal map. We could not find any which is no surprise since we are iterating on a noise map (see Sect. 2.2.2) which does not contain any signal up to the pixelisation noise, that is ensured to be negligible with regards to the instrumental noise by choice of the resolution  $k_{\text{max}}$  (see Sect. 2.2.1).

## 4. Discussion

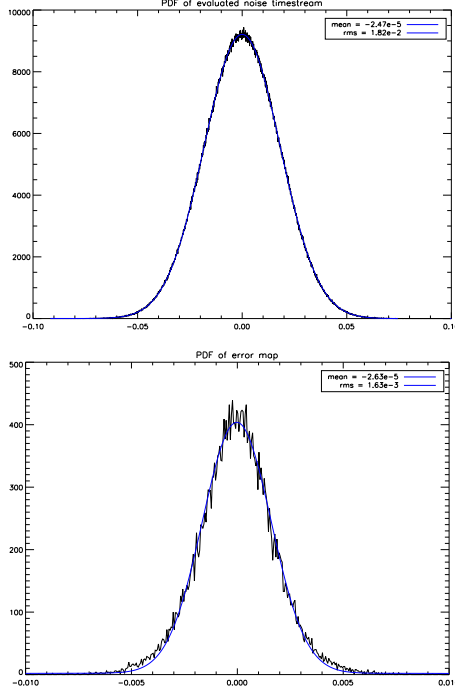
### 4.1. Why is such an algorithm so efficient?

The efficiency of such a method can be intuitively understood. Indeed, although the Jacobi method is known to converge very safely, it suffers intrinsically from a very

slow convergence for large-scale correlations (which originate mainly in the off diagonal terms of the matrix to be inverted) (Press et al. 1992). This is illustrated in Fig. 6: we show the maps of residuals after solving this system using a *standard* Jacobi method on simulated data with 50, 100, 150, and 200 iterations. We used the same simulation and therefore the same sky coverage. Obviously the largest structures are the slowest to converge (implying observed large scale residual patterns). As a consequence it seems very natural to help the convergence by solving the problem at larger scales. Whereas large-scale structures will not be affected by a scale change, smaller structures will converge faster.

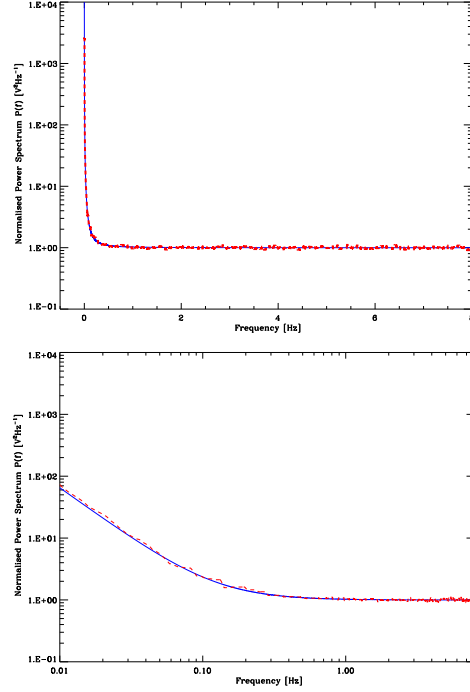
### 4.2. Scalings

We have found that this multi-grid algorithm translates naturally in a *speed up factor greater than 10* as compared to a standard Jacobi method. This is illustrated



**Fig. 4.** In the TopHat case we plot from top to bottom the recovered probability distribution function of the noise stream evaluated along the timeline as well as the error map PDF. In these two cases a fit to a Gaussian has been performed whose parameters are written inside the figures. No significant departure from a Gaussian distribution is detected. The arbitrary units are the same as the ones used for the previously shown maps.

in Fig. 7 where we plotted the evolution of the 2-norm of residuals for the two methods in terms of the number of iterations in “cycle units”. One cycle corresponds to 8 iterations at level  $k_{\max}$  for a standard Jacobi method whereas it incorporates additionally going up and down all the lowest levels in the multi-grid case. Thus the cycle timing is not exactly the same but the difference is negligible since the limiting stages are definitely the iterations performed at maximum resolution. Note the fact that the efficiency of the multi-grid method allows us to solve exactly the system up to the 4-byte machine accuracy (small rebounds at the bottom of the curve) in approximately 135 mn for ( $\mathcal{N}_{\text{tod}} \sim 8 \times 10^6$ ,  $\mathcal{N}_{\text{pix}} \sim 8 \times 10^5$ ) on a SGI ORIGIN 2000 single processor. Note also that this ultimate convergence is definitely an overkill and is somewhat artificial for current CMB experiments. Indeed, residuals with a norm smaller than noise per pixel are

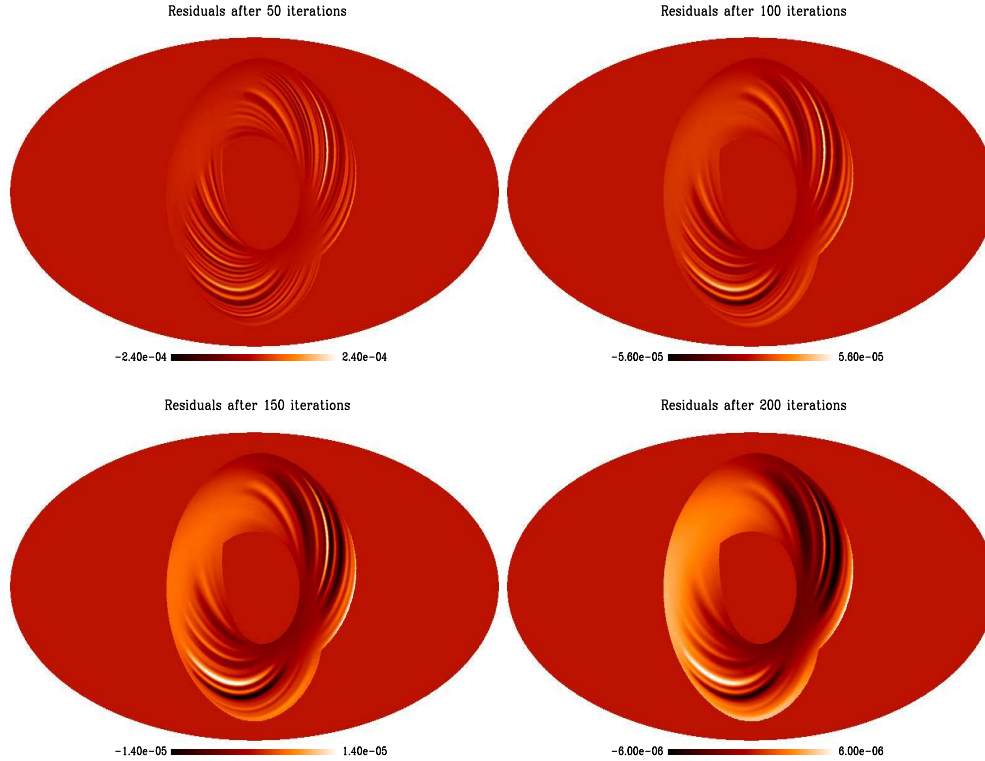


**Fig. 5.** Recovery of the noise power spectrum in the Archeops case (top: linear  $x$ -axis, bottom: log  $x$ -axis): the red thin dashed line shows the initial analytic noise power spectrum used to generate the input noise stream and the blue thick line denotes the recovered one after 6 iterations. The recovered one has been binned as described in Sect. 4.3 and both have been normalised so that the white high frequency noise spectrum is equal to one. The agreement is obviously very good. No apparent bias is visible. Note that a perfect noise power spectrum prior knowledge has been used in this application.

meaningless. Since the limiting stages are the FFT’s at the higher levels, this algorithm scales as  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_{\text{tod}} \ln \mathcal{N}_{\text{tod}})$ . In its current implementation, a rough scaling could be written this way:

$$t = 2.25 \text{ hours} \frac{\mathcal{N}_{\text{tod}} \ln(\mathcal{N}_{\text{tod}})}{12 \times 10^6 \ln(12 \times 10^6)} \frac{N_{\text{cycle}}}{6} \quad (24)$$

(note that we expect some further speed-up by reducing the number of operations at level max and eventually using a faster FFT). In terms of memory storage (RAM) it scales naturally as  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_{\text{tod}})$  since one crucial feature of this iterative method is to handle only vectors and never an explicit matrix. Typically one single timeline size object is needed at any one time in memory. Since projection and observation operations are formally independent of the number of pixels, the scaling in  $\mathcal{N}_{\text{pix}}$  is definitely



**Fig. 6.** Residual map after 50, 100, 150 and 200 iterations of a standard Jacobi method. This has been performed on simulated data for one bolometer with a nominal noise level. The sky coverage is that of ARCHEOPS coming Kiruna flight. The residual large scale patterns illustrate the difficulties the standard Jacobi method faces to converge. The stripes free area are the ones of scan crossing (see the hit map in Fig. 1).

subdominant. In terms of speed and efficiency, this method should well compare to a more obvious iterative inversion scheme such as preconditioned conjugate gradient technique. The latter also has a scaling dominated by FFT as  $\mathcal{O}(\mathcal{N}_{\text{tod}} \ln \mathcal{N}_{\text{tod}})$  (Natoli et al.). A precise study comparing the relevant pre-factors but also discussing convergence criteria will be the object of a forthcoming paper.

#### 4.3. The noise estimation issue and noise covariance matrix estimation

The estimation of the statistical properties of the noise in the timestream is an issue of paramount importance for map-making. Indeed, whereas till now we have assumed a perfect prior knowledge of the noise power spectrum in order to define the filters, it might not be that easy in practice since we cannot separate the signal from the noise.

We will therefore aim at making a joint estimation of the signal and the noise. This has been pioneered recently by Ferreira & Jaffe (2000) and implemented independently by Prunet et al. (2000). The latter implementation is rather straightforward in our particular case since it just implies reevaluating the filters after a number of iterations, given the (current) estimation of the signal map and thus of the signal data stream. Nevertheless its non-obvious convergence properties have to be studied carefully through simulations. Making use of (17) our evaluation of the noise timeline  $\hat{n}^n$  at the  $n$ th iteration and at level max is

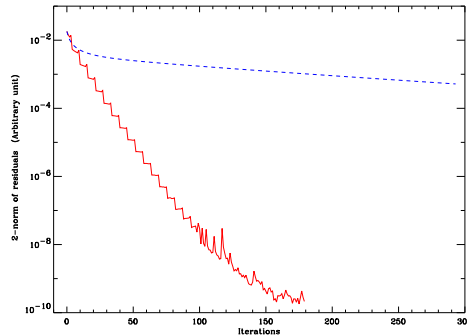
$$\hat{n}^n = d - A(\hat{y}_{k_{\text{max}}}^n + Pd). \quad (25)$$

Then we compute its spectrum and (re-) define the required filters. We then go through several multi-grid cycles (5 in the above demonstrated case) before reevaluating the noise stream. Very few evaluations of the noise are needed before getting a converged power

spectrum (around 2). In such an implementation, no noise priors at all are assumed. This is illustrated on one particular worked out example in the case of a 4 hours ARCHEOPS like flight (more detailed considerations will be discussed elsewhere). To reduce the number of degrees of freedom we bin the evaluated noise power spectrum using a constant logarithmic binning ( $\Delta \ln f = 0.15$  in our case) for  $f \leq 2 f_{\text{knee}}$  and a constant linear binning ( $\Delta f = 0.08$  Hz in our case) for higher frequency. Figure 8 shows the genuine and evaluated noise power spectrum. The initial noise power spectrum was a realistic one  $P(f) \propto (1 + (f_{\text{knee}}/f)^\alpha)$  to which we added some small perturbations (the two visible bumps) to test the method. Note the small bias around the telescope spin frequency at  $f_{\text{spin}} = 0.05$  Hz: this is illustrative of the difficulties we fundamentally face to separate signal and noise at this particular frequency through Eq. (17). Naturally, this bias was not present in the case demonstrated in Fig. 5 where we assumed a prior knowledge of the spectrum. This possible bias forced us to work with a coarser binning ( $\Delta \ln f = 1$ .) in the  $1/f$  part of the spectrum until the convergence is reached, i.e. we evaluate the noise power spectrum with the previously mentioned binning only at the last step. Proceeding this way, the convergence towards the correct spectrum is both fast (3 noise evaluations) and stable.

Second, the output of any map-making is meaningless without an evaluation of the map noise covariance matrix  $(A^T N^{-1} A)^{-1}$ . Given such a fast algorithm (and the fact it gives an evaluation of the power spectrum), it is natural to obtain it through a Monte-Carlo algorithm fueled by various realizations of the noise timeline generated using the evaluated power spectrum (in the spirit of Wandelt et al. 2000). A detailed study will be performed in a future work.

However we investigate here the chance of this approach being successful and illustrate it very briefly by a very rough  $C_\ell$  determination (which is in no way an appropriate  $C_\ell$  estimate). To this end we perform a one day TopHat like simulation including only the CMB signal plus the noise. From this data stream we obtain an “optimal” signal map as well as an evaluation of the noise power spectrum using the previously described algorithm. With the help of the `anafast` routine of the HEALPix package we calculate this way a rough  $C_\ell^{\text{signal}}$ . Using the estimated noise power spectrum we generate 10 realisations of the noise and get consequently 10 “optimal” noise maps. For each of them we measure as before  $C_\ell$  and average them to obtain  $C_\ell^{\text{noise}}$ . In order to “de-bias” the signal power spectrum recovered in this way, we subtract  $C_\ell^{\text{noise}}$  from  $C_\ell^{\text{signal}}$ . The power spectrum obtained in this manner includes as well some spatial correlations due to weak residual stripping and thus does not correspond exactly to white noise (at least in the low  $\ell$  part). For the sake of comparison we compute the power spectrum of the input signal measured the same way,  $C_\ell^{\text{input}}$ , and plotted both  $C_\ell^{\text{input}}$  and  $C_\ell^{\text{signal}} - C_\ell^{\text{noise}}$  averaged in linear bands



**Fig. 7.** The evolution of the 2-norm of residuals with the number of iterations at level max. Whereas the blue dashed line is standard iterative Jacobi, the solid red line is the iterative multi-grid Jacobi method. A full multi-grid cycle incorporates 3 iterations at level max before going down and up all the levels. The sharp jumps correspond to the moment when the scheme again reaches max level and thus benefits from the resolution at lower levels. Note that the very sharp features after  $\sim 100$  iterations are due to the fact we reached the 4-byte machine accuracy which is almost out of reach for a standard iterative method.

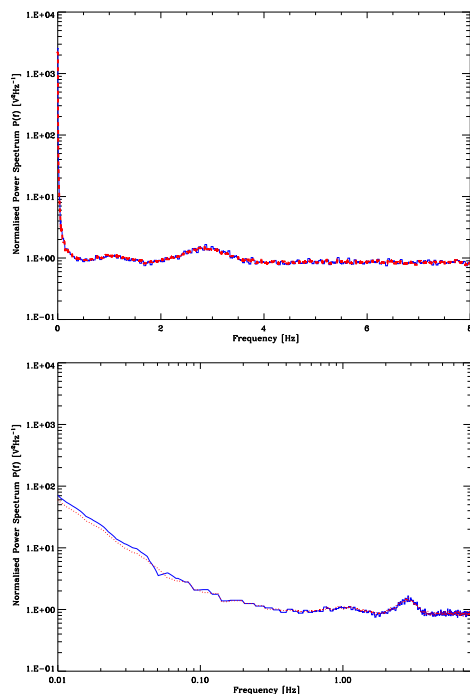
of constant width  $\Delta \ell = 80$ . The agreement is obviously very good, as illustrated in Fig. 9. The error bars take into account both the sampling induced variance as well as the beam spreading (Knox 1995).

This procedure is in no way an appropriate  $C_\ell$  measurement since we are not dealing properly here with the sky coverage induced window function which triggers some spurious correlations within the  $C_\ell$ 's. We thus do not take into account the full structure of the map noise covariance matrix. Nevertheless, the efficiency of such a rough method is encouraging for more detailed implementation and a full handling of the noise covariance matrix. Note finally that this is a naturally parallelised task which should therefore be feasible very quickly.

#### 4.4. Application to genuine data and hypothesis

The application to genuine data could be problematic if our key hypotheses were not fulfilled. We now turn to their discussion. Concerning the noise, we assumed that it is Gaussian (in order to derive our map estimator) and stationary (in order to exploit the diagonality of its noise covariance matrix in Fourier space). Both hypotheses are reasonable for a nominal instrumental noise, at least on (sufficiently long) pieces of timeline. If not, we would have to cut the “bad” parts and replace them by a constrained realization of the noise in these parts. Concerning the signal, no particular assumptions are needed in the method we are presenting. At this level, we neglected as well the effect of the non perfect symmetry of the instrumental beam. This effect should be quantified for a real

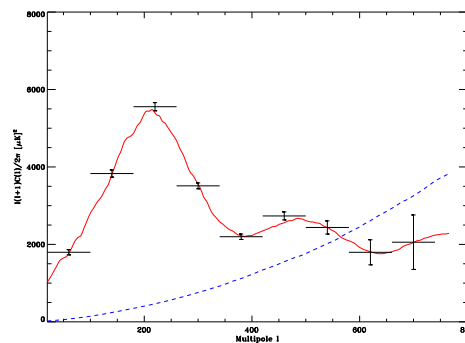




**Fig. 8.** Evaluation of the noise power spectrum (top: linear  $x$ -axis, bottom: log  $x$ -axis): the red thin dashed line shows the initial noise power spectrum obtained from the input noise stream and the blue thick line denotes the recovered one after 5 iterations. Both have been smoothed and normalised so that the white high frequency noise spectrum is equal to one. The agreement is obviously very good. Note that no noise priors at all have been used in this evaluation.

experiment (Wu et al. 2000; Doré et al. 2000). Another technical hypothesis is the negligibility of the pixelisation noise with respect to the instrumental noise but since this is fully under control of the user it should not be a problem.

In this paper, we have presented an original fast map-making method based on a multi-grid Jacobi algorithm. It naturally entails the possibility of a joint noise/signal estimation. We propose a way to generate the noise covariance matrix and illustrate its ability on a simplistic  $C_\ell$  estimation. The efficiency of this method has been demonstrated in the case of two coming balloon experiments, namely ARCHEOPS and TopHat but it naturally has a more general range of application. This tool should be of natural interest for Planck and this will be demonstrated elsewhere. Furthermore, due to the analogy of the formalisms, this should have some applications as well in the component separation problem.



**Fig. 9.** In the case of a *one day* flight of the TopHat experiment we perform a very approximate evaluation of the recovered signal band powers (black) which has to be compared to the input signal power spectrum (red line). Both have been measured the same way using the *anafast* routine of the HEALPix package. These band powers ( $\Delta\ell = 80$ ) have been performed using a fast Monte-Carlo evaluation of  $C_\ell^{\text{noise}}$  (dashed blue line) which does not correspond exactly to white noise since there remains some spatial correlations. This in no way constitutes an appropriate  $C_\ell$  measurement but is an encouraging step towards a full Monte-Carlo treatment.

We hope to apply it very soon to ARCHEOPS data. The FORTRAN 90 code whose results have been presented is available at <http://ulyse.iap.fr/download/mapcumba/>

*Acknowledgements.* We would like to thank Eric Hivon for fruitful remarks, Lloyd Knox for stimulating discussions and information on the TopHat experiment, the developers of the HEALPix (Górski et al. 1998) package which has considerably eased this work and Julian Borrill, our referee for suggesting some valuable precisions.

## References

- Benoit, A., et al. 2000, submitted to A&A
- Bond, J. R., Jaffe, A. H., & Knox, L. 1998, Phys. Rev. D, 2117
- Bond, J. R., Crittenden, R. G., Andrew, H., Jaffe, A. H., & Knox, L. 1999, Computing in Science and Engineering [astro-ph/9903166]
- Borrill, J. 1999, MADCAP: The Microwave Anisotropy Dataset Computational Analysis Package Julian Borrill in Proceedings of the 5th European SGI/Cray MPP Workshop [astro-ph/9911389], see also <http://cfpa.berkeley.edu/~borrill/cmb/madcap.html>
- Borrill, J. 2000, in proceedings to the MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference Mining the sky, Garching
- Bunn, E. F., Hoffman, Y., & Silk, J. 1996, ApJ, 464, 1
- Bouchet, F. R. 1996, Gispert, AIP Conf. Proc. 348, The mm/sub-mm Foregrounds and Future CMB Space Missions, ed. E. Dwek
- Bouchet, F. R., & Gispert, R. 1999, New Astron., 4, 443B
- de Bernardis, P., et al. 2000, Nature (London) 404, 995
- Doré, O., Bouchet, F. R., Teyssier, R., & Vibert, D. 2000, in proceedings to the MPA/ESO/MPE Joint Astronomy Conference Mining the sky, Garching

- Ferreira, P. G., & Jaffe, A. H. 2000, MNRAS, 312, 89
- Górski, E. K., Hivon, E., & Wandelt, B. D. 1998, in proceedings of the MPA/ESO Garching Conf., ed. A. J. Banday, K. Sheth, & L. Da Costa  
<http://www.eso.org/~kgorski/healpix/>
- Hanany, S., et al. 2000, ApJL, submitted [astro-ph/0005123]
- Jansen, D. J., & Gulkis, S., Mapping the Sky with the COBE-DMR, in The Infrared and Submillimeter Sky after COBE, ed. M. Signore, & C. Dupraz (Dordrecht: Kluwer)
- Knox, L. 1995, Phys. Rev. D, 52, 4307
- Natoli et al., A&A, submitted [astro-ph/0101252]
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipes, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge)
- Prunet, S., Netterfield, C. B., Hivon, E., & Crill, B. P. 2000, Iterative map-making for scanning experiments, to be published in the Proceedings of the XXXVth Rencontres de Moriond, Energy Densities in the Universe (Éditions Frontières) [astro-ph/0006052]
- Tegmark, M. 1997, ApJL, 480, L87
- Tegmark, M., & Efstathiou, G. 1996, MNRAS, 281, 1297
- Wandelt, B. D., Hivon, E., & Gorski, K. M., preprint [astro-ph/0008111]
- Wandelt, B. D., & Gorski, K. M., preprint [astro-ph/0008227]
- Wu, J. H. P., et al., ApJS, in press [astro-ph/0007212]
- Wright, E. L., Hinshaw, G., & Bennett, C. L. 1996, ApJL, 458, 53
- Wright, E. L., proceeding of the IAS CMB Workshop [astro-ph/9612006]
- Zaroubi, S., Hoffman, Y., Fisher, K. B., & Lahav, O. 1995, ApJ, 449, 446





## .2 Mesure du spectre de puissance

O.Doré, L. Knox, A. Peel

*CMB power spectrum estimation via hierarchical decomposition*

**Physical Review D. 64, 083001 (2001)**



PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 64, 083001

**CMB power spectrum estimation via hierarchical decomposition**

Olivier Doré\*

*Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis Boulevard Arago, F-75014 Paris, France*Lloyd Knox<sup>†</sup> and Alan Peel<sup>‡</sup>*Department of Physics, One Shields Avenue, University of California, Davis, California 95616*

(Received 30 April 2001; published 29 August 2001)

We have developed a fast, accurate and generally applicable method for inferring the power spectrum and its uncertainties from maps of the cosmic microwave background in the presence of inhomogeneous and correlated noise. For maps with  $10^4$  to  $10^5$  pixels, we apply an exact power spectrum estimation algorithm to submaps of the data at various resolutions, and then combine the results in an optimal manner. To analyze larger maps efficiently one must resort to suboptimal combinations in which cross-map power spectrum error correlations are only calculated approximately. We expect such approximations to work well in general, and in particular for the megapixel maps to come from the next generation of satellite missions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.64.083001

PACS number(s): 98.70.Vc

**I. INTRODUCTION**

The anisotropy of the cosmic microwave background (CMB) is proving to be a powerful cosmological probe [1]. Many cosmological parameters, and the primordial power spectra of density and gravity-wave perturbations, can be inferred from the statistical properties of the CMB—in particular from its angular power spectrum [2]. Unfortunately, exact methods for calculating the power spectrum and its uncertainties from real observations are very expensive computationally [3]. Supercomputers are required for analysis of current datasets and even they will not be sufficient for the next generation of experiments [4]. Here we introduce an approximate method for reducing a CMB map to a power spectrum and its uncertainties.

Generally applicable exact methods for finding the angular power spectrum,  $C_l$ , that maximize the likelihood have operation counts proportional to  $N^3$  where  $N$  is the number of pixels in the map. Our approach to overcoming this  $N^3$  scaling involves a hierarchical decomposition of the map into a set of submaps. That is, we subdivide the original (“primary”) map into nonoverlapping regions, each with a manageable number of pixels, in order to estimate the power spectrum from each of these submaps using an exact algorithm. To study the larger angular scale fluctuations we coarsen the primary map and if the number of these coarse pixels is still too large, we again divide into submaps. To go to yet larger angular scales, we coarsen the map further, etc. Then we calculate the expected correlations between the power spectrum estimates from all different submaps at all different resolution levels in order to optimally average them together. A similar multi-grid technique was recently developed for the reduction of time-ordered CMB data to maps [5].

Several other approaches to overcoming the  $N^3$  scaling

have been tried. These include the “pseudo- $C_l$ ” method of [6], and the “correlation-function” (CF) approach of [7]. We expect these methods to work well in the case of homogeneous noise, but the CF method will be significantly suboptimal for the levels of inhomogeneity expected in some planned observations, e.g., Planck.<sup>1</sup> Neither of these methods has been shown to deal properly with correlated noise. Minor modifications of the CF approach may make this path very attractive, though a remaining issue is the importance of noise correlations between pixels.

The  $N^3$  scaling has been overcome also by a special-purpose exact method that is expected to be applicable to the maps generated by NASA's Microwave Anisotropy Probe (MAP) satellite.<sup>2</sup> This method [8] assumes the noise is not correlated from one pixel to another and that the noise level variations are roughly azimuthally symmetric. Some of the techniques used in [8] may eventually find their place in more generally applicable (and yet still exact) power spectrum estimation algorithms, though the feasibility is not yet clear. Another special-purpose exact algorithm is that of [9], which is applicable to experiments that scan on rings. The main idea is to analyze ring sets instead of maps since both the noise and signal covariance structures are simple on the rings, whereas the noise structure can be complicated in the map space. Although some of its critical hypotheses have not been tested yet on realistic data, the ring-set approach might still be of practical importance since it may provide a useful zeroth-order solution for experiments that nearly scan on rings.

In Sec. II we describe our method in detail. In Sec. III we present the results of an application to a map with ten thousand pixels—comparable to the size of maps coming from long-duration balloon (LDB) flights. In Sec. IV we show results from a map four times larger and discuss prospects for application of our method to even larger maps such as

\*Email address: dore@iap.fr

<sup>†</sup>Email address: lknox@ucdavis.edu<sup>‡</sup>Email address: apeel@bubba.ucdavis.edu<sup>1</sup><http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/><sup>2</sup><http://map.gsfc.nasa.gov/>

OLIVIER DORÉ, LLOYD KNOX, AND ALAN PEEL

PHYSICAL REVIEW D 64 083001

those expected from MAP and Planck.<sup>3</sup> In Sec. V we compare with other methods. In Sec. VI we conclude.

## II. METHOD

Here we first describe our method in the simplest conceptual terms, and then go on to discuss subtleties which complicate our implementation.

### A. From the likelihood function to the quadratic estimator

We describe here the use of a quadratic estimator to find the maximum of the likelihood function, and the shape of the likelihood function near that maximum, as described in [10]. Time-ordered data from observation of the CMB are usually reduced to a set of pixelized maps  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  which can be decomposed into the sum of a signal and a noise contribution,  $\Delta = s + n$ . Assuming that both the noise and the signal are normally distributed, their statistical properties are fully characterized by the covariance matrices  $S = \langle ss^T \rangle$  and  $N = \langle nn^T \rangle$ . Assuming furthermore that the noise and signal are not correlated with each other, we can define

$$C = \langle \Delta \Delta^T \rangle = S + N. \quad (1)$$

The observed sky signal is assumed to be the realization of an isotropic Gaussian random field whose power spectrum  $C_l$  is the quantity we want to measure. Thus we are interested in the likelihood function  $\mathcal{L}(\Delta|C_l)$  which is given by

$$-2 \ln \mathcal{L}(\Delta|C_l) = \ln \det C + \Delta^T C^{-1} \Delta. \quad (2)$$

In particular we are interested in the location of the maximum of this function (which is the most likely  $C_l$ ) and the curvature at the maximum,  $-\partial^2 \ln \mathcal{L} / \partial C_l \partial C_l$  (which is approximately the inverse of the covariance matrix for  $C_l$ ). Note that  $C$  depends on  $C_l$  since

$$S_{ii'} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \mathcal{W}_{ii'}(l) \quad (3)$$

where  $\mathcal{W}$  is the covariance window function of the experiment.

Given an initial estimate of  $C_l$  (hereafter, the input  $C_l$ ) one can reach the likelihood maximum as follows. By Taylor-expanding  $\ln \mathcal{L}$  to second order in  $\delta C_l$  around  $C_l$ , and replacing  $-\partial^2 \ln \mathcal{L} / \partial C_l \partial C_l$  with its expectation value one can find an expression for  $\delta C_l$  such that  $C_l + \delta C_l$  maximizes the likelihood:

$$\delta C_l = \sum_{l'} \frac{1}{2} F_{ll'}^{-1} \text{Tr} \left[ (\Delta \Delta^T - C) \left( C^{-1} \frac{\partial C}{\partial C_{l'}} C^{-1} \right) \right] \quad (4)$$

and

$$F_{ll'} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ C^{-1} \frac{\partial C}{\partial C_l} C^{-1} \frac{\partial C}{\partial C_{l'}} \right] \quad (5)$$

<sup>3</sup><http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/>

is the Fisher matrix [11].

Equation (4) is a quadratic function of the data and hence the expression “quadratic estimator.” Note that we have suppressed the pixel indices in the various vectors and matrices. Since  $\ln \mathcal{L}$  is not equal to its second-order Taylor expansion (i.e.,  $\mathcal{L}$  is not a Gaussian in  $C_l$ ), some iteration is generally required to reach the likelihood maximum.

### B. Hierarchical decomposition and recombination

Now let us consider multiple maps and use Greek indices to label them. Estimates of  $\delta C_l$  from map  $\alpha$ ,  $\delta C_l^\alpha$ , are correlated with those from map  $\beta$  with correlation matrix:

$$\begin{aligned} \langle \delta C_l^\alpha \delta C_{l'}^\beta \rangle &= F_{\alpha l, \beta l'}^{-1} \\ &= \sum_{l'', l'''} (F_\alpha^{-1})_{ll''} (F_\beta^{-1})_{l'' l'''} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \text{Tr} [A_{\alpha, l''} C_{\alpha \beta} A_{\beta, l'''} C_{\beta \alpha}] \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$A_{\alpha, l} = C_{\alpha \alpha}^{-1} \frac{\partial C_{\alpha \alpha}}{\partial C_l} C_{\alpha \alpha}^{-1}. \quad (7)$$

Note that if  $\alpha = \beta$  then Eq. (6) simplifies to the usual result

$$\langle \delta C_l \delta C_{l'} \rangle = F_{ll'}^{-1}. \quad (8)$$

Given this result, we know how to combine the various  $\delta C_l$  estimates from each submap into a final  $\delta C_l$  estimate from all the submaps in a minimum-variance (optimal) manner. The minimum-variance  $\delta C_{l'}$  satisfies

$$\sum_{l'} \left( \sum_{\alpha \beta} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'} \right) \delta C_{l'} = \sum_{\alpha \beta l'} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'} \delta C_{l'}^\alpha \quad (9)$$

and has a weight matrix (inverse of covariance matrix):

$$F_{ll'} = \sum_{\alpha \beta} \mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'}. \quad (10)$$

Although for simplicity we have written these expressions for estimating individual  $C_l$ 's, issues of signal-to-noise and spectral resolution usually lead us to estimate the power spectrum in bands of  $l$ , where the shape of  $C_l$  inside the bands is assumed. The usual assumption (which we use in our applications) is that  $l(l+1)C_l/(2\pi)$  is constant inside the band.

Our treatment of the correlations of the  $\delta C_l$ 's between pairs of maps has been general. The maps may be spatially separate or overlapping; they may have equivalent or different pixel sizes. Thus we have worked out the most general solution to optimally combine the power spectra of submaps which are the result of hierarchical decomposition (HD) of a primary map.

### C. Spectral resolution

Even with optimal combining of the power spectrum estimates from the various submaps, the HD procedure results in a sub-optimal estimation of the power spectrum. Fortunately, in the cases we study, the sub-optimal results are quite close to the optimal results. Departure from the optimal results is almost entirely due to the degraded spectral resolution of the high-resolution submaps. This loss of spectral resolution is the primary drawback of the HD approach.

The spectral resolution is most severely degraded at the highest resolution levels where the submaps have the smallest spatial extents. For any map of linear extent,  $L$ , it is difficult to distinguish the mode  $P_l(\cos \theta)$  from  $P_{l+\delta l}(\cos \theta)$  where  $\delta l \lesssim \pi/L$  [12]. If one wishes to achieve a spectral resolution of  $\delta l$  for a square map with linear pixel size  $r_p$  then this map must have  $n$  pixels where

$$n \approx 2.5 \times 10^3 \left( \frac{30}{\delta l} \frac{7'}{r_p} \right)^2. \quad (11)$$

Fortunately  $\delta l = 30$  and  $r_p = 7'$  are expected to be adequate for LDB-type maps and  $2.6 \times 10^3$  pixels is a small enough submap size to allow for reasonable computation times (as shown below). For comparison, the power spectrum from the Boomerang LDB flight used for parameter-determination in [13] was binned in tophat bins of width 50.

### D. Scaling

We now calculate how computation time scales with total number of pixels in the full-resolution primary map,  $N$ , and the number of multipole-moment bands,  $N_b$ . For simplicity we assume that all submaps have the same number of pixels,  $n$ , and that we estimate the power spectrum for each submap in the same number of bands. Estimating the power spectrum and Fisher matrix for each submap takes on the order of  $N_b^2 n^3$  operations so at the finest level we have on the order of  $N_b^2 (N/n) n^3 = N_b^2 N n^2$  operations. In a systematic coarsening (such as the one below defined by combining four pixels at one resolution into one larger pixel for the next coarser level), most of the submaps are at the finest resolution and therefore analysis and combining of these finest submaps dominates the demands on memory and CPU time.

For large enough  $N$ , the dominant computational step will be in calculating the correlations between submaps. The matrix multiplication in Eq. (6) takes on the order of  $n^3$  operations, so performing it for every pair of submaps and pair of bands takes on the order of  $N_b^2 N^2 n$  operations.

The procedure can in principle be parallelized for the efficient use of  $n_{\text{proc}}$  processors, where  $n_{\text{proc}}$  ranges anywhere from  $N_b$  to  $\sim (N/n)^2 N_b^2$ . The crucial use of parallelization comes in the dominant combining stage, which scales as  $(N/n)^2 N_b^2$ , and involves the combination of  $\sim \frac{1}{2} (N/n)^2$  pairs of submaps. This type of independent pair loading can be efficiently shared on any number of processors lower than  $\frac{1}{2} (N/n)^2$ . For LDB-type missions one might have  $N_b \sim 10$  and  $(N/n)^2 N_b^2 \sim 4 \times 10^4$  and approximately 200 pairs of submaps to combine [if we indiscriminately retain all submap-

submap correlations (see Sec. IV)]. For supercomputers with  $n_{\text{proc}} \lesssim 10^2$ , every processor can be efficiently used.

### E. The noise matrix

Our approach assumes that we begin with a pixelized map and its corresponding noise covariance matrix. Map-making procedures usually produce a weight matrix, which is the inverse of the noise matrix. Inverting an arbitrary weight matrix takes on the order of  $N^3$  operations. Fortunately, this inversion only needs to be done once and is feasible for LDB-size maps.

For larger maps, treatment of the weight matrix by general matrix inversion algorithms is impossible. Fast methods are being developed [14] which rely on the origin of the map weight matrix in the weight matrix of the time-ordered data. That is, the map weight matrix is  $A^T N^{-1} A$  where  $N_{ii}^{-1}$  is (here) the time-stream weight matrix for a stationary noise process, and  $A_{it}$  is the pointing matrix element that is 1 if at time-sample  $t$  the telescope is sampling map pixel  $i$  and zero otherwise. This special structure allows for each iteration of a conjugate gradient solution to be performed much faster than for an arbitrary matrix.

Another possibility (suggested in [7]) is to calculate the noise covariance matrix by Monte Carlo methods. In other words, one would make repeated simulations of the map noise and average those together to get any desired elements of the noise matrix. In addition to possible speed advantages, this approach also has storage advantages since one probably needs fewer than  $N/2$  realizations to have a sufficiently accurate estimate of the noise. One may still need thousands of realizations of the noise—e.g., 20000 realizations are required for the noise matrix elements to be accurate to within 1% of the diagonal.

### F. Coarsening

The amount of work to be done depends on the choice of number of resolution levels, which is governed by how many pixels are combined to form one pixel at the next-coarsest level. Greater coarsening between levels leads to fewer required operations, but at the expense of greater loss of information. Since the cost in computing time is slight for using the most modest coarsening possible while maintaining (roughly) square pixels, we always coarsen by averaging four pixels into one. This coarsening is also easily implemented in the HEALPIX pixelization scheme, which we use [15].

In general, one can create a coarse submap  $\Delta$  from a fine submap  $\delta$  as follows:

$$\Delta = W^{-1} \alpha w \delta \quad (12)$$

where  $\alpha_{ci}$  is 1 for all fine pixels  $i$  in coarse pixel  $c$  and zero otherwise,  $w$  is some weighting of the fine pixels and  $W = \alpha w \alpha^T$ . The coarse-fine and coarse-coarse noise covariance matrices are given by:

OLIVIER DORÉ, LLOYD KNOX, AND ALAN PEEL

PHYSICAL REVIEW D 64 083001

$$\begin{aligned}\langle \Delta \delta^T \rangle_{\text{noise}} &= W^{-1} \alpha w N = W^{-1} \alpha \quad (\text{if } w = N^{-1}) \\ &= \frac{N \alpha}{4} \quad (\text{if } w = I)\end{aligned}\quad (13)$$

and:

$$\begin{aligned}\langle \Delta \Delta^T \rangle_{\text{noise}} &= W^{-1} \alpha w N w^T \alpha^T W^{-1} = W^{-1} \quad (\text{if } w = N^{-1}) \\ &= \frac{\alpha N \alpha^T}{16} \quad (\text{if } w = I).\end{aligned}\quad (14)$$

For optimal coarsening  $w = N^{-1}$  and for uniform averaging,  $w = I$ . We assume that we are coarsening four pixels into one and therefore that  $\alpha \alpha^T = 4I$ . We see that uniform averaging leads to noise covariance matrices that are easy to calculate. For optimal averaging we need to invert  $W$  which is substantially less challenging than inverting  $N^{-1}$  to get  $N$  since it has  $1/16$  the number of elements. The same technique used for calculating  $N$  by exploiting the origin of  $N^{-1}$  in time-ordered data (as explained in the previous subsection) can be used to get  $W^{-1}$  [16].

Coarsening will usually result in pixel sizes that are large compared to the angular resolution of the instrument and therefore pixelization effects must be taken into account. Our treatment of the effect of pixelization on the signal correlation function is approximate, i.e., we use a pixel window which is the average of the evaluated power spectrum for every individual pixel. To prevent these approximations from creating errors in the final power spectrum, we ignore information from multipole moments greater than some critical value where the approximation introduces significant error. Pixelization effects are discussed in more detail in Sec. III.

### G. Iteration

A single application of the quadratic estimator of Eq. (4) might not result in a  $C_l$  that is sufficiently close to the likelihood maximum. This will be the case if the input  $C_l$  is too far from the likelihood maximum. Fortunately, iterative application of Eq. (4) has been shown to converge quite rapidly [10].

When using the hierarchical decomposition approach, it is important that the iteration be done *globally*. That is, within each iteration, the power spectrum from each submap should be estimated using the same input  $C_l$ . If iteration is performed within the submaps, the combined result will suffer from cosmic bias [17], which results from the fact that uncertainties in  $C_l$  are not normally distributed. For a normally distributed variable, the curvature of the log of the likelihood function is independent of location in the parameter space (because the likelihood is a Gaussian). However, for  $C_l$ , this curvature does depend on location. For larger values of  $C_l$  the curvature is smaller (i.e., the variance is larger). Thus, upward fluctuations should result in larger variances than downward fluctuations and so if one combines them together assuming Gaussianity, the net result is a downward bias due to the over-weighting of the downward fluctuations.

The combination procedure of Eq. (9) implicitly assumes the estimates are normally distributed. We avoid the cosmic

bias that might result from this assumption by weighting the downward and upward fluctuations equally. That is, we make sure to calculate  $\mathcal{F}_{\alpha l, \beta l'}$  from the same  $C_l$  for all submaps. Thus any desired iteration, e.g., motivated by a large correction from the input  $C_l$ , should be done globally.

Since the uncertainty in  $C_l$  is non-Gaussian, specifying the  $C_l$  that maximizes the likelihood function, and  $\langle \delta C_l \delta C_{l'} \rangle$ , does not completely characterize the uncertainty. The uncertainty can be approximately characterized by use of the “offset log-normal form” [17]. That is, error in the quantity  $Z_l \equiv \ln(C_l + x_l)$  is approximately normally distributed. The offset,  $x_l$ , is a measure of the noise contribution to the uncertainty, as opposed to the sample-variance contribution to the uncertainty. It can be calculated as outlined in [17].

### III. APPLICATION

First we discuss the specifications for the simulated maps we used. Then we compare the results of HD with those of the exact method.

#### A. Simulation map details

We have applied our method using a FORTRAN code, which we have named MADCUMBA, to two different simulated maps, hereafter simulations *A* and *B*. In both cases, the angular-power spectrum used was that of a Cosmic Background Explorer (COBE) normalized adiabatic, scale-invariant “lambda” cold dark matter ( $\Lambda$ CDM) model with  $\Omega_\Lambda = 0.6$ ,  $\Omega_b = 0.05$ ,  $\Omega_{\text{cdm}} = 0.35$  and  $H_0 = 75 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  and was generated by the publicly available code CMBFAST [18]. The simulated signal maps were generated using the SYNFAST routine in the publicly available HEALPIX package [15], at HEALPIX  $N_{\text{side}} = 256$  (level 8, where  $N_{\text{side}} = 2^{\text{level}}$ ), in which the pixel solid angle is around  $(13.7')^2$ , assuming a circular beam with a full-width at half-maximum of  $20'$ . Finally, pixel noise taken from a Gaussian distribution with zero correlations between pixels was added to the maps. The only significant differences between our two simulations are size and noise characteristics.

The simulation *A* map has  $10^4$  pixels, is square in shape, and has a homogeneous noise variance of  $(20 \mu\text{K})^2$  in each pixel. Its relatively small size allows for the power spectrum to be estimated by the exact method (i.e., without dividing into submaps) using the MADCAP package [4]. This is compared to our calculation via HD into four equal-area square 2500 pixel submaps at full resolution and one coarse 2500 pixel submap at HEALPIX  $N_{\text{side}} = 128$  (level 7) which covers the same area as the primary map.

The simulation *B* map is also square in shape and has  $4 \times 10^4$  pixels with a noise variance that is cosine-modulated throughout the map, varying from  $(20 \mu\text{K})^2$  to  $9 \times (20 \mu\text{K})^2$ . Here, we decompose the primary map into sixteen submaps at full resolution, four submaps at the next coarser resolution and one coarsest resolution submap which covers the same area as the primary map but, by being two levels coarser, contains  $1/16^{\text{th}}$  as many pixels. Thus, as with simulation *A*, we use  $n = 2500$  pixel submaps.

083001-4

CMB POWER SPECTRUM ESTIMATION VIA ...

PHYSICAL REVIEW D 64 083001

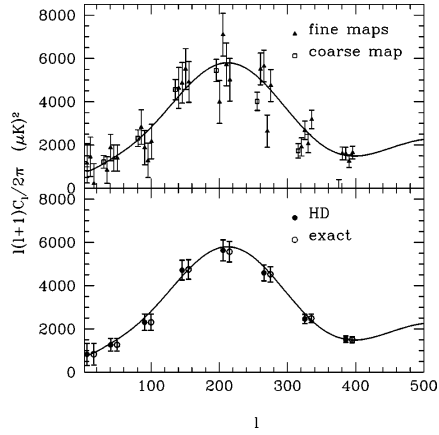


FIG. 1. Simulation A results. Top panel: Power spectrum estimates from four individual full-resolution 2500 pixel submaps (triangles) and one coarse 2500 pixel submap. Bottom panel: Power spectrum estimates from optimally combining the top-panel results (solid circles) and from the exact calculation (open circles). Note that in both panels, points are slightly shifted horizontally for clarity.

### B. Comparison with exact method

The top panel of Fig. 1 shows estimates of the powers from the individual submaps in simulation A. The bottom panel shows both the result of optimally combining them and the exact results obtained directly from the primary map. The solid line in both panels is the original power spectrum for the simulations. The differences between the power estimates are less than 20% of the standard error from the exact method.

Not only do the power spectrum estimates agree quite well, but so do the estimates of the uncertainties. The error bars in Fig. 1 are the square roots of the diagonal elements of the respective Fisher matrices. In Fig. 2 one can see how well entire rows of the exact and HD Fisher matrices agree.

Clearly, the bigger the submaps at the finest resolution, the better this approach works. For a fixed length scale of interest, larger submaps contain a greater fraction of corresponding pixel pairs, and therefore achieve better spectral resolution ( $\delta l$ ). Unfortunately, the compute-time, when dominated by the combine procedure, scales as  $n$  and therefore as  $1/\delta l^2$  [or possibly  $n^2$  but with a much smaller prefactor (see Sec. IV)]. Thus, choice of  $n$  can be critical. We studied how our information loss varies with  $n$  by comparing the error bars from the HD procedure to the full analysis for  $n=2500$  (the case above),  $n=1600$ , and  $n=900$ . The results are shown in Fig. 3. Note that for the  $n=2500$  case all the error bars are increased over the exact case by less than 10%. These larger error bars are consistent with the less than 20% differences (in units of variance of exact results) between the power estimates.

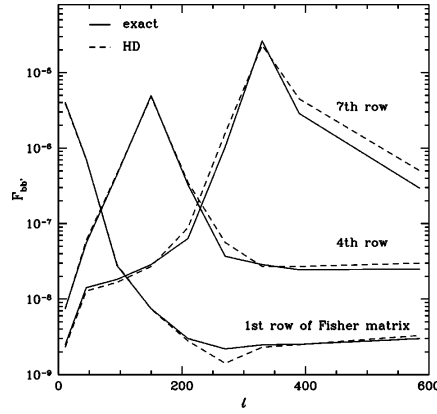


FIG. 2. Three rows of the Fisher matrix calculated exactly (solid lines) and also via the combination (HD) procedure (dashed lines) for simulation A.

The upward trend in error ratio with increasing band number is an effect of decreasing spectral resolution. To understand this, we examine Fig. 4 which shows the ratio of the HD over the exact method of the band contributions to the total weight,  $W_b$ , where:

$$W_b = \sum_{b'} F_{bb'} \quad (15)$$

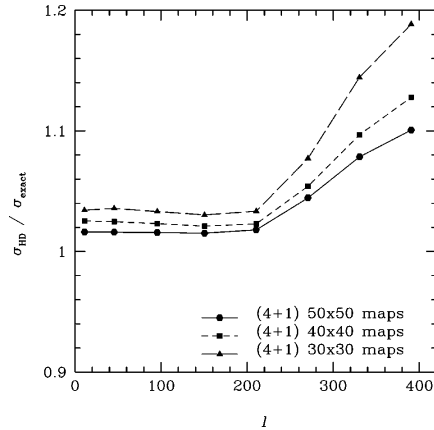


FIG. 3. Error bars from HD divided by error bars for the exact analysis. Each case represents a primary map with  $4n$  pixels divided into four  $n$ -pixel full resolution submaps and one coarsened  $n$ -pixel map where  $n=30 \times 30$  (triangles),  $40 \times 40$  (squares) or  $50 \times 50$  (hexagons).

083001-5



OLIVIER DORÉ, LLOYD KNOX, AND ALAN PEEL

PHYSICAL REVIEW D 64 083001

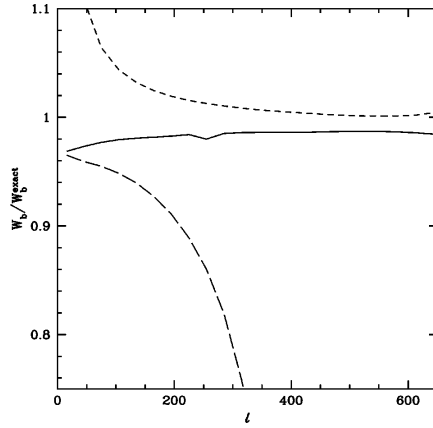


FIG. 4.  $W_b/W_b^{\text{exact}}$  where  $W_b = \Sigma_b F_{bb'}$ . The  $W_b$ 's are from analysis of the simulation A map, but into finer bins of width  $\delta l = 30$ . The short-dashed line is  $4W_b/W_b^{\text{exact}}$  where  $W_b$  is just from analysis of one of the four full-resolution submaps; the long-dashed line is  $W_b/W_b^{\text{exact}}$  where  $W_b$  is from analysis of the coarse resolution submap; the solid line is  $W_b/W_b^{\text{exact}}$  where  $W_b$  is from combining information from all five submaps.

and the total weight of an experiment is  $W \equiv \Sigma_b W_b$ . For this analysis we switch to a finer binning of 25 bands, each with width  $\delta l = 30$ .

Note first the short-dashed line which is four times the ratio of  $W_b$  for one full resolution submap over the one for the primary map. If the four submaps were uncorrelated, we would expect this ratio to be  $\sim 1$ . However, since the submaps are correlated, this ratio is greater than 1. We see that submap-submap correlations are more important at lower  $l$  than higher  $l$  values.

Though individual elements of the Fisher matrix may be larger for a sub-optimal method than an optimal one, we know that the contribution from a given band to the total weight *cannot* be larger. Thus, the best we could hope for is that the ratio of  $W_b$  for the HD method over the exact method is near unity. We see from Fig. 4 that it is everywhere greater than 0.97. Thus the fact that the combined procedure gives at most 10% larger error bars (20% larger variances) in Fig. 3 cannot be due to any reduction in the total weight (which we see is negligible), but must be due to how each  $W_b$  is distributed among the  $F_{bb'}$ . In particular, it is the lower spectral resolution of the smaller submaps which results in the  $W_b$  being more spread out within a Fisher matrix row and less concentrated in the diagonal element  $F_{bb}$  as is clear from the 7th row plotted in Fig. 2.

A plot of  $F_{bb}$  ratios (similar to the  $W_b$  ratio plot of Fig. 4) shows that the cost of this weight redistribution within a Fisher matrix row is a decrease in the diagonal Fisher elements (in the  $l=250$  to  $l=600$  range) to 80–85% of the exact ones. Not only is  $F_{bb}$  suppressed then, but the larger off-diagonal elements also lead to larger diagonal elements

of  $F^{-1}$ . With broader bands (such as those used for Fig. 3), the error-bar increase due to degraded spectral resolution is not as severe. The effect of the larger off-diagonal elements propagates from band-to-band and is least significant at the lower bands which are benefiting from the full spectral resolution of the coarse submap.

Also in Fig. 4 one can see that the pixelization effects can be fairly severe. This is unfortunate since we only treat the pixelization influence on the signal-correlation matrix,  $S$ , approximately. Our treatment is that provided with the HEALPIX package, which assumes that the correlation between two pixels only depends on the angular distance between them and not on their orientation. This is an approximation for two reasons: the pixels are anisotropic, and their shapes depend on their location. The validity of the approximate window-function can vary from submap to submap if the submaps are not large enough to have a representative sampling of all pixel shapes. This is another reason to use large submaps. We take each cross-level pixel window function to be the geometric mean of the two auto-level pixel window functions.

Because our treatment of pixelization effects is approximate, we throw out information from coarse submaps at a conservatively low  $l$  value. In simulation A, for example, powers from the coarse resolution submap were only considered for  $l < 225$ . In the final combined results, the higher bands only use information from the four fine resolution submaps. We eliminate the influence of the coarse submap on the higher bands by inserting very large numbers into diagonal elements of the  $(\mathcal{F}^{-1})_{al,a'l'}$  matrix. This marginalization technique is described in Appendix A of [10] and can be understood as artificially adding some noise to these particular bands so as to give them very low weight.

The upturn in Fig. 3 after  $l=225$  where the coarse submap information is no longer used indicates that there may be an advantage to keeping the coarse submap information to yet higher  $l$ . This would require a more accurate treatment of the pixel effect on the signal correlation function and its derivatives with respect to  $C_l$ . One way to do this, which would be fairly easy to implement and not cause significant speed reduction, would be to avoid using pixel window functions by calculating coarsened signal matrices directly from finer ones. For example, if the fine signal matrix is  $s$  then the next-coarser signal matrix,  $S$ , must be

$$S = \frac{\alpha s \alpha^T}{16} \quad (16)$$

where  $\alpha_{ci}$  is 1 for all fine pixels  $i$  in coarse pixel  $c$  and zero otherwise. Once again, we are summing four pixels into one. The only approximations here come from approximations made in calculating  $s$ . If these approximations were acceptable for the finer level, they will certainly be adequate for the coarser level. Keeping the coarse level information out to higher bands may be very important for extension to megapixel maps because it is the only other way to improve spectral resolution besides increasing  $n$  for the highest-resolution submaps.

083001-6

## IV. ANALYSIS OF GENERAL MEGAPIXEL MAPS

The map from simulation *A* has homogeneous white noise. Below we will discuss results from HD analysis of the map from simulation *B* in which the noise is inhomogeneous but still uncorrelated. Yet we believe HD will work well on realistic maps with correlated noise. In this section we briefly make the case for the success of HD in the presence of correlated noise and then move on to discuss how HD can be made to work for primary maps with 100 to 1000 times more pixels than the simulation *A* map. We will see that further approximations are necessary, but that they are likely to work well.

Even though our applications of HD have only been on simulated maps with uncorrelated noise, we believe that HD will work well on realistic maps with correlated noise. This is easiest to see for correlations on length scales smaller than the size of the smallest submaps. Longer-range noise correlations will not be treated accurately in the analysis of the smallest submaps. But this does not matter because the effect will only be on lower- $l$  bands where the smallest submaps do not have much weight. The affected bands will be those determined by coarser and larger submaps that will once again be large compared to the correlation length. Thus the prospects for HD on maps with correlated noise are quite good.

Applying HD as we have described it to megapixel maps is prohibitively expensive in terms of the demand on computing resources. A rough scaling argument is sufficient to demonstrate this point. In the megapixel regime, we are strongly dominated by the calculation of all the elements of  $\mathcal{F}_{al,a'l'}^{-1}$ . The number of elements in this matrix is  $\sim (N/n)^2 N_b^2$ . On an SGI Origin 2000, the calculation of a single element of  $\mathcal{F}_{al,a'l'}^{-1}$  takes 188 sec  $(n/2500)^3$  on a single MIPS R12000 300 MHz processor where  $n$  is the number of pixels in a submap. Thus the wall-clock time is

$$t \sim 1 \text{ year} \left( \frac{500}{n_{\text{proc}}} \right) \left( \frac{N}{3 \times 10^6} \right)^2 \left( \frac{n}{2500} \right) \left( \frac{N_b^2}{1000} \right) \quad (17)$$

where we have assumed the efficient use of  $n_{\text{proc}}$  processors [19]. Thus the need to avoid exact calculation of every element of  $\mathcal{F}_{al,a'l'}^{-1}$  is apparent.

To make the case for the likely success of fast approximations to  $\mathcal{F}_{al,a'l'}^{-1}$  we turn to the results from simulation *B*. In Fig. 5, we plot four power spectra: one is the result of optimally combining the individual power spectra; one is the power spectrum of the coarsest submap; the other two are the result of a *simple* averaging of the power spectra for the submaps within a given resolution level as if they were independent. Again, the solid line represents the original input power spectrum.

We find the very good agreement between simple averaging and the exact combination (for the highest bands) to be very encouraging because it is strong evidence that signal correlations between non-overlapping submaps are not very important. We certainly see they are not important in the highest bands which are influenced only by submaps with no spatial overlap (since the submaps are all at the same reso-

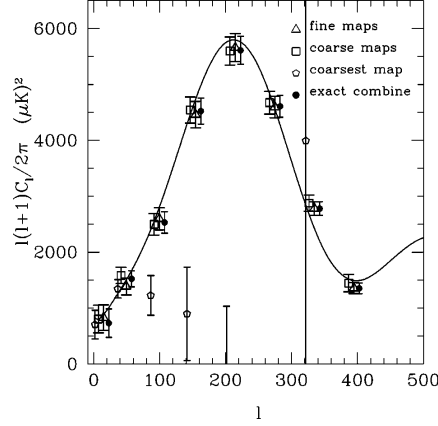


FIG. 5. Results from HD of the 200 by 200 pixel simulation *B* map. There are sixteen submaps at the finest resolution level [level 8 (13.7') pixels], four at the medium level [level 7 (27.5') pixels] and one at the coarsest level [level 6 (55' pixels)]. Triangles and squares represent the result of doing a naively weighted average of the power spectrum estimates, i.e., neglecting correlations, from the sixteen fine submaps and the four coarse submaps, respectively. Pentagons represent results for the one coarsest submap. Filled circles show the results of the optimal combination of all submaps in which all power-spectrum correlations are computed exactly. As in Fig. 1, points are shifted horizontally for clarity.

lution level). If any given band is only influenced by at most two or three levels and we only need to calculate correlations for non-zero submaps then the vast majority of submap pairs can be ignored. Even if some cannot be ignored, their relative insignificance means that there are probably crude approximations to them that will work well.

Calculating only the correlations between overlapping submaps at adjacent resolution levels takes time

$$t = 78 \text{ hours} \left( \frac{200}{n_{\text{proc}}} \right) \left( \frac{N}{10^7} \right) \left( \frac{n}{5000} \right)^2 \left( \frac{N_b}{40} \right) \left( \frac{\Delta N_b}{3} \right) \quad (18)$$

where for each of the  $N_b$  bands only the nearest  $\Delta N_b$  bands are considered [20]. Calculating correlations between overlapping submap pairs whose resolution levels differ by 2 will, at most, double the time. Correlations between non-overlapping map pairs may be significant but can probably be treated approximately in an insignificant amount of time. Development and study of these approximations are probably necessary for practical application of HD to megapixel maps.

We also see from Fig. 5 that even when there is a mix of resolution levels influencing a band, using just one of those levels provides a rough approximation. A fairly good "quick-and-dirty" power-spectrum estimator is the coarsest submap's power spectrum for band 1, the coarse submaps' power spectrum for bands 2 and 3, and the finest submaps'

OLIVIER DORÉ, LLOYD KNOX, AND ALAN PEEL

PHYSICAL REVIEW D 64 083001

power spectrum for bands 4 to 8. Such an estimator has its applications, for example, finding a  $C_l$  that is close enough to optimal that one only needs a single iteration of the exact HD procedure.

The scaling of  $t$  with  $N$  in Eq. (18) is linear if  $n$  is fixed. But if we fix spectral resolution and the area of the primary map, then  $n \propto N$  and therefore  $t \propto N^3$  once again. Or, at fixed  $N$  and primary map area,  $t \propto (1/\delta l)^4$ . Our fiducial choice above of  $n=5000$  corresponds for Planck with  $N=10^7$  and  $r_p=3.5'$  to  $\delta l=45$ . This may be sufficient since physical models have fairly smooth power-spectra. We see that the degree to which degraded spectral resolution affects our ability to discriminate between different models is a crucial issue for the applicability of HD to Planck. We remind the reader that spectral resolution is the only thing that is significantly compromised with HD; Fig. 4 shows the total weight from each band is within a few percent of optimal.

### V. COMPARISON WITH OTHER METHODS

The HD method has many advantages over other fast, approximate methods. Perhaps the *chief* advantage is its ability to handle maps with correlated noise. Its main disadvantage is spectral resolution. To understand better these competitive advantages/disadvantages it is worth spending some time discussing these other methods—especially since we will see they are somewhat complementary and hence a hybrid approach may be useful.

This discussion of other methods is facilitated by writing down the following generalization of Eq. (4):

$$C_l = \sum_{l'} \frac{1}{2} F_{ll'}^{-1} \text{Tr} \left[ W(\Delta \Delta^T - N) W \frac{\partial C}{\partial C_{l'}} \right] \quad (19)$$

and Eq. (5):

$$F_{ll'} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ W \frac{\partial C}{\partial C_l} W \frac{\partial C}{\partial C_{l'}} \right]. \quad (20)$$

These equations specify a general unbiased quadratic estimator, with pixel pair-weighting determined by  $W$ . The  $F_{ll'}$  matrix is derived by demanding that the estimator be unbiased ( $\langle C_l^{\text{estimate}} \rangle = C_l$ ). In general, its inverse is not equal to  $\langle \delta C_l \delta C_{l'} \rangle$  which is instead given by

$$\mathcal{F}_{ll'}^{-1} = \frac{1}{2} F_{ll''}^{-1} F_{l'l''}^{-1} \text{Tr} [A_{l''} C A_{l''} C] \quad (21)$$

where  $A_l \equiv W(\partial C / \partial C_l) W$ , similar to Eq. (7).

For the minimum-variance estimator,  $W = C^{-1}$ . The “correlation-function” approach (CF) of [7] uses the simpler  $W = I$  in pixel space [21]. Spherical-harmonic transforming the map and averaging  $|a_{lm}|^2$ s over  $m$  uses  $W = I$  in spherical-harmonic space. The multi-scale method we have just described above likewise corresponds to a choice of  $W$ . Unfortunately, this  $W$  is complicated and not illuminating to work out explicitly; HD is best understood in the context of Eqs. (6)–(10).

It is worth pointing out that the estimator for CF requires on the order of  $N_b^2 N^2$  operations where  $N_b$  is the number of  $l$ -bands. One can get rid of the  $N_b^2$  factor by rewriting it as an estimator for  $C(\theta)$  in fine bins of  $\theta$  and then Legendre-transforming the result, as was done in [7]. Further computational accelerations are possible by use of KD-tree search techniques which use coarse-graining at large distances [22]. In addition, fast spherical harmonic transforms lead to great time-savings in harmonic methods.

However, the simplicity of these other choices for  $W$  does have drawbacks. Specifically, high-noise areas and low-noise areas make equal contribution to the estimator. To date, the success of these methods has only been demonstrated on simulations with homogeneous white noise. The first obvious improvement to CF is to replace  $W_{ij} = \delta_{ij}$  with  $W_{ij} = 1/\sigma_i^2 \delta_{ij}$  (in pixel space) as suggested in [7].

What is less obvious is how to weight pixel pairs in the presence of correlated noise. This is where further development of the CF approach is most needed. One possible route to pursue is band-diagonal choices of  $W_{ij}$  which capture the spatially local noise correlations. Computation with band-diagonal  $W$ 's can still be quite fast; they are still an order of  $N^2$  as long as the bandwidth is less than  $\sqrt{N}$ . Perhaps longer-range correlations could be included in some hybrid scheme of HD and CF. Here CF (with band-diagonal  $W_{ij}$ ) would be used on the primary map and then HD would be used to calculate lower- $l$  values which may have been affected by long-range noise correlations. This hybrid scheme also has the advantage of complementing HD where its spectral resolution is lowest [23].

Although the calculation of  $C_l$  is fast with simple choices for  $W$ , the calculation of the error covariance matrix [Eq. (21)] is slow; i.e. the number of operations scales with  $N^3$  because of the matrix multiplications. One option is to estimate the errors by Monte-Carlo methods [7]. Another is to combine the CF and HD approaches in yet another way: use CF as a means to produce an input power spectrum sufficiently close to the optimal one that only a single iteration of HD is required.

To break the spectral resolution bottleneck (which limits us to  $\delta l \gtrsim \pi/L$ ) with an HD-type algorithm, phase information (and not just power information) for each sub-map must be preserved in some way. At the moment we see no way of doing this and thus spectral resolution stands as the greatest drawback of the HD method.

### VI. CONCLUSIONS

We have concentrated on developing a fast and reliable method for calculating power spectra and their uncertainties from maps with  $N=10^4$  to  $10^5$  pixels. Methods that work in this regime are of immediate practical importance. Our tests show very good agreement with exact methods at the lower end of our  $N$  range where the exact analysis is feasible on a supercomputer. The HD method is the only existing method for calculating a power spectrum and its uncertainties from general, inhomogeneous correlated noise patterns with maps of this size in reasonable amounts of time [24].

We have not tested our method on maps with correlated

noise. But since noise-correlations are taken into account exactly within each submap, we expect our method to handle correlated noise effectively, unlike the other fast methods mentioned above. These expectations will be put to the test soon as HD is applied to existing datasets from LDB flights, such as *Archeops*<sup>4</sup> and *TopHat*.<sup>5</sup>

The local nature of the method has some advantages for controlling contamination of the final power spectrum result. In the extreme, one can simply cull submaps with the largest foreground contamination. Less drastically, one could down-weight the power spectrum determinations from submaps according to the suspected level of contamination.

To summarize, we have developed and investigated an HD method of power-spectrum estimation. We have demonstrated that for LDB-size maps HD is sufficiently fast and insignificantly sub-optimal. Its main advantages over other fast methods are its generality (including its ability to handle correlated noise) and the fact that the power spectrum uncer-

tainties are calculated directly. Application to larger maps will rely on further approximations which we expect to work well but require further investigation. The main disadvantage to HD is the degraded spectral resolution at the smallest angular scales. The impact of this degradation on parameter-determination also warrants further investigation. The combination of HD<sup>6</sup> with other methods may be fruitful.

#### ACKNOWLEDGMENTS

O.D. is grateful to the UC Davis Cosmology group for warm hospitality. L.K. is grateful to IAP for the same. We benefited from conversations with J. R. Bond, J. Borrill, F. Bouchet, A. Jaffe, R. Stompor, I. Szapudi, P. Koev, D. Vibert and R. Teyssier and the computer resources of S. Colombi and NERSC.

<sup>4</sup><http://www-crtbt.polycnrs-gre.fr/archeops/>

<sup>5</sup><http://topweb.gsfc.nasa.gov/>

<sup>6</sup>MADCUMBA, a Fortran 90 implementation of the HD procedure, will be made available for public use. Comments and questions should be directed to O. Doré at [dore@iap.fr](mailto:dore@iap.fr)

- [1] See, e.g., A. Jaffe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3475 (2000).
- [2] L. Knox, Phys. Rev. D **52**, 4307 (1995); G. Jungman, M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and D. Spergel, *ibid.* **54**, 1332 (1996); J. R. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark, Mon. Not. R. Astron. Soc. **291**, L33 (1997); D. Eisenstein, W. Hu, and M. Tegmark, Astrophys. J. Lett. **504**, L57 (1998).
- [3] J.R. Bond, R. Crittenden, A.H. Jaffe, and L. Knox, Comput. Sci. Eng., **1** (2), 21 (1999).
- [4] J. Borrill, Phys. Rev. D **59**, 027302 (1999).
- [5] O. Doré, R. Teyssier, F.R. Bouchet, and D. Vibert, astro-ph/0101112, see also <http://ulyse.iap.fr/download/mapcumba>
- [6] B.D. Wandelt, E. Hivon, and K. Górski, Phys. Rev. D (to be published), astro-ph/0008111; astro-ph/9808292.
- [7] I. Szapudi, S. Prunet, D. Pogossyan, A. Szalay, and J.R. Bond, astro-ph/0010256.
- [8] S.P. Oh, D.N. Spergel, and G. Hinshaw, Astrophys. J. **510**, 551 (1999).
- [9] B. Wandelt, Proceedings of MPA/MPE/ESO Conference "Mining the Sky," 2000, Garching, Germany, astro-ph/0012333; astro-ph/0012416.
- [10] J.R. Bond, A.H. Jaffe, and L. Knox, Phys. Rev. D **57**, 2117 (1998).
- [11] These equations were independently derived as the optimal, unbiased quadratic estimator in M. Tegmark, Phys. Rev. D **55**, 5895 (1997).
- [12] This can also be understood as the usual problem of localizing simultaneously in position and momentum; M. Tegmark, Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, 299 (1996).
- [13] A. Lange *et al.*, Phys. Rev. D **63**, 042001 (2001).
- [14] J. Borrill and P. Koev (in preparation).
- [15] E.K. Górski, E. Hivon, and B.D. Wandelt, in Proceedings of the MPA/ESO Garching Conference 1998, edited by A.J. Banday, K. Sheth, and L. Da Costa, and <http://www.eso.org/kgorski/healpix/>
- [16] A. Jaffe (private communication).
- [17] J.R. Bond, A.H. Jaffe, and L. Knox, Astrophys. J. **533**, 19 (2000).
- [18] U. Seljak and M. Zaldarriaga, Astrophys. J. **469**, 437 (1996).
- [19] We tested the scaling with  $n_{\text{proc}}$  by running MADCUMBA using up to 77 processors.
- [20] We remind the reader that application of HD to megapixel and larger maps requires some way to calculate  $N$  for the sub-maps from the time-ordered data. This could be accomplished by the method we briefly described in Sec. II D, which will be described in more detail in [14].
- [21] That the correlation-function approach can be regarded as a quadratic estimator with sub-optimal weighting was emphasized in [7].
- [22] A. Moore *et al.*, Fast Algorithms and Efficient Statistics: N-point Correlation Functions, Proceedings of MPA/MPE/ESO Conference "Mining the Sky," 2000, Garching, Germany, astro-ph/0012333.
- [23] The speed-up with KD-tree search techniques will also lead to some spectral resolution degradation.
- [24] A possible exception is a Monte Carlo pseudo- $C_l$  method described in E. Hivon, K.M. Gorski, C.B. Netterfield, B.P. Crill, S. Prunet, and F. Hansen, astro-ph/0105302.



### **.3 Lobe instrumental elliptique et mesure de l'intensité totale et de la polarisation du CMB**

P. Fosalba, O.Doré, F.R. Bouchet

*Elliptical Beams in CMB Temperature and Polarization Anisotropy  
Experiments : An Analytic Approach*

Physical Review D., in press (2001)



## Elliptical Beams in CMB Temperature and Polarization Anisotropy Experiments: An Analytic Approach

P. Fosalba, O. Doré, F.R. Bouchet

*Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis, boulevard Arago, F-75014 Paris, France*

*fosalba@iap.fr, dore@iap.fr, bouchet@iap.fr*

(November 6, 2001)

We present an analytic approach to the estimation of beam asymmetry effects in CMB temperature and linear polarization anisotropy experiments. We derive via perturbative expansions simple and accurate results for the case of an elliptical Gaussian window. Our results are applied to investigate the effect of beam ellipticity in the estimation of full-sky polarization correlation functions and the covariance matrix of power spectra. The relevance of this effect is also discussed by forecasting errors including beam asymmetry for current and future CMB experiments.

98.70.Vc

### I. INTRODUCTION

As high-resolution CMB experiments explore smaller fluctuations in the temperature anisotropy with high sensitivity, a better understanding of systematic effects is required to make more accurate measurements. These systematics have a direct impact on the ability we have to improve the process of CMB data analysis at the level of map-making, power spectrum estimation and ultimately in constraining cosmological parameters.

A common simplifying assumption in CMB data analysis is to take the experimental beam response, i.e., the iso-contours of constant beam response, to have a perfectly axisymmetric or *circular* shape with a Gaussian profile. This theoretical approximation introduces systematic errors in the statistical analysis at angular scales comparable to the beam-width,  $\sigma$ . Consistently, it bias estimates probing multipole orders  $\ell \sim 1/\sigma$  in the spherical harmonic analysis (i.e., the generalization of flat-space Fourier analysis for full-sky signals) of CMB experiments.

As far as the main lobe is concerned, experimental beam responses for *off-axis* detectors are well-known to exhibit *asymmetric* shapes very well described by an elliptical shape with a Gaussian profile, as discussed for several experiments in the literature, e.g., Planck [8], [25], Maxima-1 [41] and Python-V [34]. However, the effect of beam asymmetry has been investigated only recently and the approach taken up to now has relied on semi-analytic [34] or full numerical integration [8], [41].

In this paper we shall introduce an analytic approach to address the problem of beam asymmetry in CMB experiments. In particular, we conveniently describe an elliptical Gaussian window in terms of a perturbative expansion around a circular Gaussian one. As it will be shown below, this description allows a simple and intuitive discussion of the beam harmonic transform, the full-sky correlation and covariance matrices for both total intensity and linear polarization anisotropy observations.

The paper is organized as follows: in §II we present our analytic approach and derive the spherical harmonic transform of the total intensity beam. A detailed discus-

sion of the effect of ellipticity to first order is provided in §III. These results are validated numerically in §IV. Results for linear polarization experiments are given in §V. We implement this formalism to calculate full-sky polarization correlation functions in §VI. Errors in temperature and polarization power spectra are discussed in §VII. Finally, we present a general discussion and our main conclusions in §VIII.

### II. BEAM SPHERICAL HARMONIC TRANSFORM: TOTAL INTENSITY

Let us consider the beam response,  $B$ , to the total intensity sky distribution in a CMB temperature anisotropy experiment. For single-dish experiments with high spatial resolution, the beam geometry can be accurately described in the flat-sky approximation. Within this approximation, an elliptical Gaussian window function can be expressed in cartesian coordinates,

$$B(x, y) = B_0(\sigma_a, \sigma_b) \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_a^2} - \frac{y^2}{2\sigma_b^2}\right] \quad (1)$$

where we define  $\sigma_a$  and  $\sigma_b$  as the beam-widths in the major (x) and minor (y) axis, and the normalization is given by  $B_0(\sigma_a, \sigma_b) = 1/(2\pi\sigma_a\sigma_b)$ .

The Fourier transform of the flat-sky elliptical window is simply given by,

$$B(k_x, k_y) = \exp\left[-\frac{k_x^2\sigma_a^2}{2} - \frac{k_y^2\sigma_b^2}{2}\right] \quad (2)$$

being  $k_x$  and  $k_y$  the modes along the major and minor axis of the ellipse, respectively. However, the Fourier analysis is only accurate for small patches of the sky (i.e. patches covering an area of a few deg<sup>2</sup> or smaller).

For full-sky CMB analysis we shall introduce a decomposition of the window function in the spherical harmonic basis  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ,

$$B(\theta, \phi) = \sum_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} b_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3)$$



where  $\ell \approx \pi/\theta$  is the multipole order and  $b_{\ell m}$  are the coefficients of the harmonic transform,

$$b_{\ell m} = \int d\Omega B(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \quad (4)$$

being  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  the differential solid angle. Above, we have rewritten the elliptical window function  $B(\theta, \phi)$  in the (planar) polar coordinates,  $x = \theta \cos(\phi - \omega)$  and  $y = \theta \sin(\phi - \omega)$ ,

$$B(\theta, \phi) = B_0 \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_b^2} f(\phi)\right] \quad (5)$$

where  $f(\phi) \equiv 1 - \chi \cos^2(\phi - \omega)$  describes the deviations from a circular (or axisymmetric) Gaussian window and the ellipticity parameter  $\chi \equiv 1 - (\sigma_b/\sigma_a)^2$ , is defined within the range  $1 > \chi \geq 0$ . We have introduced an arbitrary phase  $\omega$  which defines the orientation of the major axis of the elliptical beam in polar coordinates. The circular Gaussian window is thus recovered for the limiting case  $\chi = 0$ .

However, the above integral for the spherical harmonic transform of the elliptical Gaussian window Eq.(4) has no exact analytic solution and one has to resort to semi-analytic approaches or full numerical integration to evaluate it (see eg, [34]).

In this section we shall show that Eq.(4) can be solved analytically by introducing a convenient Taylor expansion of the elliptical (non-axisymmetric) window around a circular (axisymmetric) one. This perturbative expansion yields a series in powers of the ellipticity parameter  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} B(\theta, \phi) &= B_0 \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \chi \cos^2(\phi - \omega)\right] \\ &\approx B_0 \left[ B(\theta) + \chi \frac{\theta^2}{2\sigma^2} B(\theta) \cos^2(\phi - \omega) \right] + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (6)$$

where the first term corresponds to a circular Gaussian beam  $B(\theta) = \exp[-\theta^2/2\sigma^2]$  of beam-width  $\sigma_b$  (the minor axis of the ellipse; we shall denote  $\sigma_b = \sigma$  in what follows for simplicity) and  $B_0 = [\int d\Omega B(\theta, \phi)]^{-1}$  is the beam normalization.

The above expansion of the window function in real space Eq.(6) leads to an analog expansion in harmonic space.

$$b_{\ell m} = \sum_n b_{\ell m}^{(n)} \frac{\chi^n}{n!} = b_{\ell m}^{(0)} + b_{\ell m}^{(1)} \chi + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (7)$$

The  $n$ -th order term of the harmonic transform can be exactly integrated. In particular, only even  $m$ -modes have a non-vanishing harmonic transform \* which reads (see Appendix 1 for the key steps of the derivation),

\*This is due to the azimuthal symmetry of the elliptical geometry, what is realized in the  $\cos^2 \phi$  factor of  $f(\phi)$  in Eq.(5).

$$b_{\ell m}^{(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n-m/2}} N_{\ell-m} \frac{2n!}{(n+m/2)!} \sigma^{2+m} e^{-z} L_{n-m/2}^{(m)}(z) \quad (8)$$

being  $z = \ell^2 \sigma^2/2$ ,  $N_{\ell m}$  is the normalization of the spherical harmonics (see Appendix 1) and  $L_{\nu}^{(\alpha)}(z)$  denotes the  $\nu^{\text{th}}$  order Laguerre polynomials of parameter  $\alpha$  (see Eq.(A18) for explicit forms).

Replacing Eq.(8) into Eq.(7) one gets the final expression for the harmonic transform of the elliptical beam

$$b_{\ell m} = \sigma^m N_{\ell m}^I e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m} L_{\nu}^{(m)}(z) \chi^{\nu+m/2} \quad (9)$$

where we define  $N_{\ell m}^I = N_{\ell-m}/\bar{B}_0$ ,  $\bar{B}_0 = B_0/(2\pi\sigma^2)$ , and  $\gamma_{\nu, m} = (2\nu+m)!/(2^{2\nu+3m/2}(\nu+m/2)!(\nu+m)!)$ . Note that the circular Gaussian beam is recovered when  $\chi = 0$ , in which case, only the  $m = 0$  contribution is non-zero,  $b_{\ell m} = N_{\ell 0} \exp[-\ell^2 \sigma^2/2] \delta_{m,0}$ . Combining the conjugation rule for spherical harmonics,  $b_{\ell m}^* = (-1)^m b_{\ell -m}$  (where non-zero  $m$ -contributors are even for an elliptical beam) and the reality condition of the beam transform,  $b_{\ell m}^* = b_{\ell m}$  one sees that *both negative and positive modes have the same harmonic transform*,  $b_{\ell -m} = b_{\ell m}$ . Therefore, in what follows, we shall assume  $m > 0$  without loss of generality.

Eq.(9) is one of the main results of this paper. This equation demonstrates that the leading order correction to the circular Gaussian window from a given  $m$ -mode (for  $m > 0$ ) is of order  $\mathcal{O}(\chi^{m/2})$ . In other words, contributions from higher  $m$ -modes to the elliptical window function can be identified as higher order corrections to the circular Gaussian window.

For high resolution experiments,  $\sigma \ll 1$  rad, *the elliptical beam harmonic transform is dominated by the axisymmetric or circular contribution to the window function*, i.e. the  $m = 0$  mode. It is important to realize that the circular mode does no longer have a Gaussian profile, due to ellipticity corrections (see  $\nu \neq 0$  terms in Eq.(9)). To leading order in the small  $\chi$ -expansion ( $\nu = 0$  in Eq.(9)), contributions from  $m > 0$  modes are highly suppressed,

$$b_{\ell m} = \gamma_{0, m} \chi^{m/2} (\sigma \ell)^m N_{\ell 0} e^{-\ell^2 \sigma^2/2}, \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (10)$$

Therefore non-circular (higher- $m$ ) modes only have a non-negligible contribution to the harmonic transform with respect to the circular ( $m = 0$ ) mode when  $\sigma^2 \ell^2 \approx 1/\chi$ , which is well beyond the peak of the window function. The peak of the window is determined from the leading order contribution to  $b_{\ell 0}$  Eq.(12). In fact, the peak location and width can also be accurately estimated from an *effective* circular Gaussian window of width,  $\sigma_{eff} = \sigma(1 + \chi/4)$ .<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Higher-order corrections in the perturbative expansion

$$\sigma^2 \ell_{peak}^2 \simeq (1 - \chi/4)/2 \quad (11)$$

since  $\chi < 1$ . Note also that the window function peaks at increasingly higher  $\ell$ -multipoles as one considers higher (non-circular)  $m$ -modes. This is in agreement with recent numerical results [34] and provides a simple demonstration for them.

### III. FIRST ORDER ANALYSIS: SLIGHTLY ELLIPTICAL BEAMS

For most current and future experiments, such as Boomerang [6], MAXIMA-1 [26] and Planck [29], the beam is only slightly elliptical, ie, the widths of the major ( $\sigma_a$ ) and minor axis ( $\sigma$ ) of the beam differ by less than 20%,  $1.2 \geq \sigma_a/\sigma \geq 1$  ( $\chi \leq 0.3$ ).

In this limit, a first order ellipticity correction to the circular Gaussian beam would give an accurate approximation to the actual beam harmonic transform, which yields for the modes  $m = 0$  and  $m = 2$ ,

$$b_{\ell 0} = N_{\ell 0} e^{-\ell^2 \sigma^2/2} \left[ 1 - \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 \right] + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (12)$$

$$b_{\ell 2} = N_{\ell 0} \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 e^{-\ell^2 \sigma^2/2} + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (13)$$

what shows that

$$b_{\ell 2} = \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 b_{\ell 0} + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (14)$$

From this equation it is straightforward to see that for  $\chi \ll 1$  the leading order contribution from the  $m = 2$  mode is a few percent of that from  $m = 0$  at the peak of the window  $\sigma^2 \ell_{peak}^2 \approx 1/2$  (see Eq.(11)).

However, notice that for the circular mode of the window Eq.(12) the linear correction to the circular Gaussian window (second term in Eq.(12)) is of the same order and peaks at the same multipole than the leading term in the non-circular ( $m = 2$ ) mode (see Eq.(13)). Therefore, both corrections have to be included to compute the harmonic transform of the elliptical beam consistently. This is illustrated in Fig 1 for an elliptical beam with  $\chi = 0.3 (\sigma_a/\sigma = 1.2)$  and  $\theta_{FWHM} = 10'$ .

Eq.(9) ie, higher-order terms in  $\nu$  and  $m$  only modify significantly this definition for very large ellipticities  $\chi \simeq 1$ .

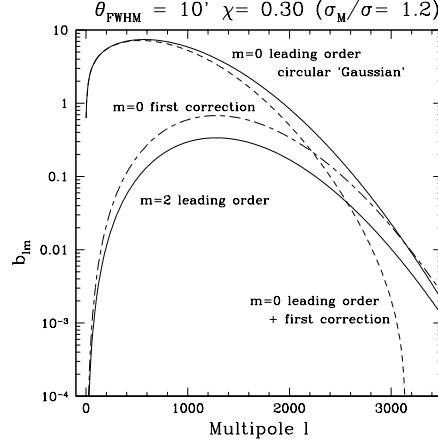


FIG. 1. Ellipticity corrections to the harmonic transform for a slightly elliptical beam, with ellipticity  $\chi = 0.3$  and resolution  $\theta_{FWHM} = 10'$ . (Solid lines) Leading order terms (for  $m = 0$  and  $m = 2$ ). The first correction to the circular ( $m = 0$ ) mode (dashed line) is of the same order and peaks at the same multipole than the leading order term for the non-circular ( $m = 2$ ) mode (dot-dashed).

Similarly, for highly elliptical beams, higher order  $\chi$  corrections to the circular mode become non-negligible and consequently higher non-circular modes have to be incorporated to calculate the harmonic transform accurately. Explicit expressions for the window function up to second order in the ellipticity are given in the Appendix A, Eq(A20). This result arises naturally in the perturbative approach to the harmonic analysis of elliptical beams.

### IV. NUMERICAL INVESTIGATIONS

In this section we shall validate the analytic results presented in the previous sections regarding the total intensity window. Although the same validation has been carried out for the linear polarization (see §V), we shall concentrate here on the total intensity window as the results for polarization are a straightforward generalization of the total intensity ones.

First of all, we shall test whether the perturbative series Eq.(8) is accurate and how fast it converges to the numerical solution. This analysis is done in §IV A. In addition, we shall see in §IV B to what extent the *scaling solution* for the higher  $m$ -modes of the window, Eq.(10), is a good approximation to the exact solution. As will be discussed in §IV C, prescriptions for an accurate computation of the window function from the perturbative solutions naturally lead to a criteria to how many higher

(non-circular)  $m$ -modes have to be included in a consistent analysis of elliptical windows.

### A. Probing the convergence

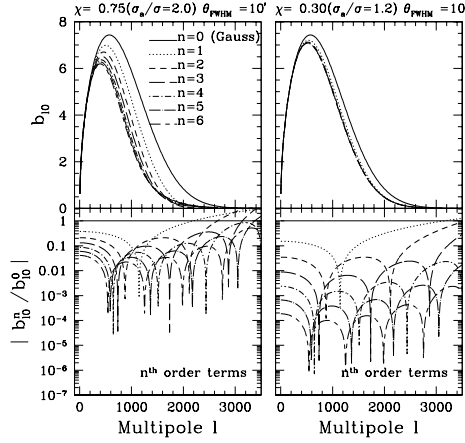


FIG. 2. Probing the convergence. Considering two different ellipticities of a given beam of width  $\theta_{\text{FWHM}} = 10'$ , we plot in the upper panel the  $n$ -th order expansion of  $b_{\ell m}$  and in the lower panel, the ratio of the  $n$ -th order correction to the 0-th one. Both plots illustrate the nice and fast convergence of the  $\chi$  expansion.

To test our approach, we shall compare the analytic results, Eq.(9), to a full numerical integration of Eq.(4) using a Runge-Kutta method of fifth order [30]. The fast convergence of the analytical expansion is illustrated in Fig 2. Indeed, in this figure we consider for one single beam size,  $\theta_{\text{FWHM}} = \sqrt{8 \ln 2} \sigma = 10'$ , two different values of the ellipticity parameter,  $\chi$ :  $\chi = 0.75$  ( $\sigma_a/\sigma = 2.0$ ) and  $\chi = 0.30$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.2$ ) shown in the left and right panels, respectively. The upper panels display the expansion  $b_{\ell 0}^{(n)}$  for various  $n$ . In both situations, the convergence is seen to take place for rather small  $n$ . Comparing this two columns we see also that, as expected, the greater the beam ellipticity  $\chi$  is, the higher the number of terms needed to reach the convergence. Both this statements will be precised quantitatively below.

The lower panel illustrates this statement by drawing instead the ratio of the individual  $n$ -th order terms to the 0-th order one (for the same values of  $n$  than in the upper panels of Fig 2).

### B. Higher $m$ modes contribution

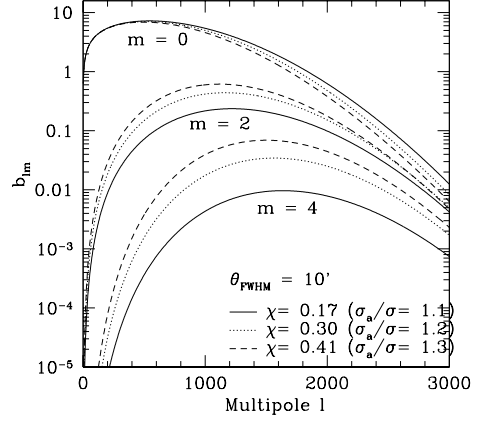


FIG. 3. Higher- $m$  modes in the elliptical window spherical transform.

An analogous behavior as the one illustrated above for the  $m = 0$  mode convergence is seen for  $m \neq 0$ . We remind here that odd  $m$ -modes are null and that only  $m \geq 0$  modes are considered since negative modes have exactly the same harmonic transform,  $b_{\ell m} = b_{\ell -m}$  (see §II). Assuming this convergence, we now examine the amplitude of the higher  $m$  modes contribution, as they were derived analytically in §II. This is illustrated in fig.(3) for a beam of same width, *i.e.*  $\theta_{\text{FWHM}} = 10'$ , and for 3 different values of  $\chi$ , namely  $\chi = 0.17$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.1$ ),  $\chi = 0.30$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.2$ ) and  $\chi = 0.41$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.3$ ). We plot here the  $n$ -th order expansion of  $b_{\ell m}$  for  $m = 0, 2, 4$  where  $n$  is high enough so that this expansion is fully converged.

The scalings demonstrated in Eq.(10) are clearly visible. First we check that  $m > 0$  modes amplitude scales as  $(\sigma \ell)^m$ , making them not only sub-dominant (just a few percent contribution to the beam transform as compared to circular mode  $m = 0$ ) but also shifting their peak to higher  $\ell$  as  $m$  increases. Second we check also the scaling with the ellipticity,  $\chi^{m/2}$ , that clearly implies that the smaller  $\chi$ , the more drastically the  $m > 0$  modes are suppressed.

A direct comparison with the approximate *scaling solution* for the higher  $m$ -modes Eq.(10) is shown in Fig 4. In particular, the plot shows both the fully converged expansion of these  $m = 0, 2, 4$  modes and the *scaling solution* for rather small values of the ellipticity  $\chi$ . We see that both the peak position and the amplitude are pretty well reproduced. Therefore the scaling solution,

Eq(10), is found to be a satisfactory description of such sub-dominant terms in the description of the elliptical beam transform. Note however that the larger the beam ellipticity  $\chi$ , the worse this approximation turns out to be.

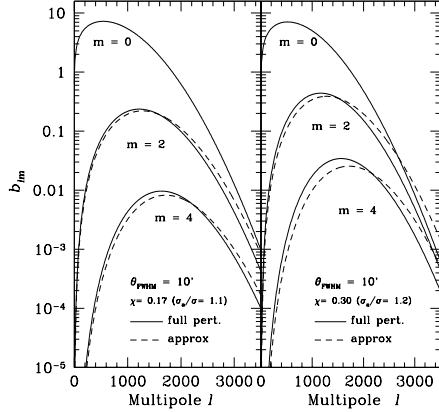


FIG. 4. Probing an approximate computation of  $b_{\ell m}$  for  $m = 2, 4$ . Considering one beam of width  $\theta_{FWHM} = 10'$ , we plot both the converged expansion of  $b_{\ell m}$  and an approximate evaluation of it as defined in Eq.(10). The left panel corresponds to  $\chi = 0.17$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.1$ ), and the right one to  $\chi = 0.30$  ( $\sigma_a/\sigma = 1.2$ ). In both situations, the peak position and its amplitude are well reproduced.

### C. Prescriptions for an accurate analysis

As was shown above, the convergence of the perturbative development is fast enough so that very few terms of the expansion are needed. To quantify this convergence and to define some useful prescriptions, we compare it to exact numerical integration and determine the order  $n$  of the  $b_{\ell 0}$  expansion needed in order to obtain an agreement better than 1% up to  $\ell_{max} = 5 \ell_{peak}$ , where  $\ell_{peak}$  denotes the maximum of the window function as defined in Eq.(11). Some prescriptions are summarized in table (IV C), where we write this order for two different beams of full width half maximum,  $\theta_{FWHM} = 5'$  and  $10'$  and a set of reasonable ellipticities. Even if we see that naturally the greater the ellipticity, the greater is the required  $n$ , as a matter of fact, in most of practical situations (see §VIII), 3 terms at most are needed.

Note that this criteria is very stringent and if we require, say, only a 2% accuracy at the peak level, only 1 ellipticity correction is needed for  $\chi \leq 0.3$ , i.e.  $\sigma_a/\sigma \leq 1.2$ .

$\chi(\sigma_a/\sigma)$		0.17(1.1)	0.30(1.2)	0.40(1.3)	0.49(1.4)	0.55(1.5)
$\theta_{FWHM}$	$\ell_{peak}$	548	531	519	509	502
$10'$	$n$	2	3	4	6	6
$\theta_{FWHM}$	$\ell_{peak}$	1097	1063	1039	1020	1005
$5'$	$n$	2	3	4	6	7

**Table I.** Required number of terms  $n$  in the ellipticity expansion, Eq(8), to achieve a precision greater than 1% up to  $\ell_{max} = 5 \ell_{peak}$  for beams of different  $\theta_{FWHM}$  and ellipticity  $\chi$ .

The numbers presented in this table lead to another requirement. Indeed, as was discussed in § III the  $n$ -th order correction to the  $m = 0$  mode is of the same order than the leading order contribution to the  $m = n$  mode ( $m$  even) (see Eqs.(9) & (10)). Thus to be self-consistent, the highest perturbative order,  $n$ , in the ellipticity corrections to the circular ( $m = 0$ ) mode of the window,  $b_{\ell 0}$ , should match the highest- $m$  mode considered for an accurate computation of the full beam transform,  $b_{\ell m}$ . For example, the previous table implies that to handle properly the elliptical beam effects at a 1% precision till  $\ell_{max} = 5 \ell_{peak}$ , e.g. for a beam of  $\theta_{FWHM} = 10'$ , we have to include  $m = 2$  mode for  $\chi = 0.17$  or  $0.30$ , while one has to include  $m = 2, 4$  modes for  $\chi = 0.40$ , and so forth.

## V. BEAM SPHERICAL HARMONIC TRANSFORM: LINEAR POLARIZATION

The CMB radiation is expected to be linearly polarized as caused by Thomson scattering of CMB photons off hot electrons primarily at the surface of last scattering (see [32], [2], [18], [4]) while foreground Galactic emission is observed to be linearly polarized as well (see e.g. [11] for recent reviews and references therein). Thus we shall focus here on the detection of linearly polarized radiation and neglect circular polarization in what follows.

The case for a linearly polarized beam with an elliptical shape can be treated in an analog way to the formalism developed in §II for the total intensity beam.

Linearly polarized radiation can be conveniently described in terms of the so-called Stokes parameters,  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{U}$  (note that we use  $\tilde{X}$  to denote beam parameters, as opposed to sky parameters,  $X$ ). Stokes parameters of a plane wave are related to the amplitudes of the electric field of the wave in two directions orthogonal to the wave propagation direction.

Following standard notation (see e.g [35], [33], [19], [20], [9]), the Stokes parameters of the beam are decomposed in the spin-2 spherical harmonics basis  $\pm_2 Y_{\ell m}$  as,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{Q} \pm i\tilde{U}) = \sum_{\ell m} (b_{\ell m}^G \mp i b_{\ell m}^C) \mp_2 Y_{\ell m} \quad (15)$$

Equivalently, the harmonic transform of a linearly polarized beam in terms of the so-called Gradient “G” and Curl “C” components reads,

$$b_{\ell m}^G \pm i b_{\ell m}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\Omega (\tilde{Q} \mp i\tilde{U}) \pm_2 Y_{\ell m}^* \quad (16)$$

from which it follows that

$$\begin{aligned} b_{\ell m}^G &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2Y_{\ell m}^* + (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2}Y_{\ell m}^* \right] \\ b_{\ell m}^C &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2Y_{\ell m}^* - (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2}Y_{\ell m}^* \right] \end{aligned} \quad (17)$$

where the above expressions assume that the available power to each of the modes (G,C) is 1/2 of the total intensity (ie, we assume fully polarized detectors, with no sensitivity to circular polarization). Note that this  $G$  (Gradient) and  $C$  (Curl) components of the linear polarization are simply linked to the  $E$  and  $B$  ones, respectively, in the following way,

$$b_{\ell m}^E = -\sqrt{2} b_{\ell m}^G \quad b_{\ell m}^B = -\sqrt{2} b_{\ell m}^C \quad ; \quad (18)$$

See [43] for a pedagogical discussion of the  $E, B$  polarization modes. For a pure co-polar beam (ie, for an ideal optical system and telescope, see [9]), we have

$$\tilde{Q} \pm i\tilde{U} = -B(\theta, \phi) e^{\pm 2i\phi} \quad (19)$$

where  $B(\theta, \phi)$  is defined as in Eq.(5). Eq.(19) reflects the spin-2 nature of linear polarization in the  $(\theta, \phi)$  basis.

Let us evaluate the harmonic transform of the linearly polarized beam. Using the parity symmetries for an elliptical beam (see Appendix 2),

$$b_{\ell m}^C = i b_{\ell m}^G, \quad b_{\ell -m}^C = -i b_{\ell -m}^G \quad (20)$$

and the general (intrinsic to the definition of the G,C components) parity transformations,<sup>†</sup>

$$b_{\ell -m}^P = b_{\ell m}^P, \quad P = G, C \quad (21)$$

one realizes that the harmonic transform of linear polarization can be fully determined from one of the two components alone, say  $G$ . Moreover, both negative and positive modes have the same harmonic transform. Thus, in what follows, we shall assume  $m \geq 0$  without loss of generality.

In full analogy with the total intensity computation (see §II) we introduce a perturbative expansion of the elliptical beam,

$$b_{\ell m}^G = \sum_n b_{\ell m}^{G(n)} \frac{\chi^n}{n!} = b_{\ell m}^{G(0)} + b_{\ell m}^{G(1)} \chi + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (22)$$

This expansion can be exactly integrated for any order in an analogous way to the total intensity case and yields (see Appendix 2 for the basic steps of the computation),

<sup>†</sup>Note that these conjugation rules are consistent with [20] & [28], and are inconsistent by a factor  $(-1)^m$  with respect to [42].

$$b_{\ell m}^G = \sigma^{m-2} N_{\ell m}^G e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m-2} L_{\nu}^{(m-2)}(z) \chi^{\nu+m/2-1} \quad (23)$$

where we define  $N_{\ell m}^G = -\ell^{2m} M_{\ell m} / (4\sqrt{2}\bar{E}_0)$ , and the coefficients  $\gamma_{\nu, m-2}$  are the same than those defined for the total intensity Eq.(8). The normalization  $M_{\ell m}$  is given in Appendix 2 along with the basic notation for the spin-2 harmonics.

Note that, up to the normalization  $N_{\ell m}^G$ , the linear polarization beam transform Eq.(23) is formally the same than the total intensity one Eq.(8), with the index for the  $m$ -modes shifted by  $m \rightarrow m-2$ . This shift is introduced by the difference in spin-index  $s$  between the linearly polarized beam  $s=2$  (see Eq.(19) above) and the total intensity beam  $s=0$ .

In particular, Eq.(23) shows that *the  $m=2$  mode dominates the harmonic transform of the linearly polarized elliptical beam*. Note that for a circular Gaussian beam ( $\chi=0$ ) *only* the  $m=2$  mode is non-vanishing. To leading order in the ellipticity expansion ( $\nu=0$  in Eq.(23)) one finds that contributions from  $m>2$  modes are subdominant,

$$b_{\ell m}^G = -\gamma_{0, m-2} \chi^{m/2-1} (\sigma\ell)^{m-2} \frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} e^{-\ell^2\sigma^2/2} \quad (24)$$

with  $m=4, 6, \dots$ . In particular, one finds the same suppression of higher  $m$ -modes with respect to  $m=2$ , in full analogy to the results for the total intensity Eq.(10). Also, the linear polarization window function peaks at increasingly higher  $\ell$ -multipoles as one considers higher  $m$ -modes, as was the case for the total intensity window.

The expressions for the first non-zero  $m$ -contributors ( $m=2$  and  $m=4$  modes) up to the first ellipticity correction are

$$b_{\ell 2}^G = -\frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} e^{-\ell^2\sigma^2/2} \left[ 1 - \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 \right] + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (25)$$

$$b_{\ell 4}^G = -\frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 e^{-\ell^2\sigma^2/2} + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (26)$$

and therefore,

$$b_{\ell 4}^G = \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 b_{\ell 2}^G + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (27)$$

and the same expressions hold for negative modes, as  $b_{\ell -m}^G = b_{\ell m}^G$ . This is in full analogy with the scaling relation between higher  $m$ -modes found for the total intensity window Eq.(14).

Whenever the beam ellipticity is fairly large, one has to consider higher-order corrections in the ellipticity to compute accurately the window function. Explicit expressions for the window function up to *second order* in the ellipticity are given in the Appendix A, Eq(B22).

## VI. FULL-SKY POLARIZATION CORRELATION MATRIX

Linearly polarized radiation is described by the total intensity  $T$  and the Stokes parameters  $Q$  and  $U$ . If the CMB polarized radiation is Gaussian distributed, one needs, a priori, 6 statistical quantities to characterize correlations among them. It is more convenient to use linear combinations of the Stokes parameters with different parity properties, the so-called  $E$  (or Gradient  $G$ ) and  $B$  (or Curl  $C$ ) modes, for which only 4 correlations are non-vanishing. Namely the correlation between  $E$  and  $T$  modes and the 3 autocorrelations.

Following [42] we will consider the correlation matrix  $\mathbf{M}$  between 2 arbitrary measurements in the sky

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) \equiv \begin{pmatrix} \langle T_1 T_2 \rangle & \langle T_1 Q_2 \rangle & 0 \\ \langle T_1 Q_2 \rangle & \langle Q_1 Q_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle U_1 U_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (28)$$

where 1, 2 denote the directions  $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2$  in the sky. The cross terms  $\langle T_1 U_2 \rangle = \langle Q_1 U_2 \rangle = 0$  as required by symmetry under parity transformations (see e.g. [20]).

The entries of the correlation matrix are defined as follows:

$$\begin{aligned} \langle P_1 P_2 \rangle &= \langle P_{eff}^*(\hat{\mathbf{n}}_1, \omega_1) P_{eff}(\hat{\mathbf{n}}_2, \omega_2) \rangle ; \\ P_{eff}(\hat{\mathbf{n}}, \omega) &= \int d\Omega D(\phi, \theta, \omega) \tilde{P}^* P \end{aligned} \quad (29)$$

where  $P_{eff}$  is the result of convolving the polarized beam  $\tilde{P} = \tilde{T}, \tilde{Q}, \tilde{U}$  with the sky,  $P = T, Q, U$ .

In this formalism the “scanning strategy” of a given experiment is obtained by specifying the Euler angles as a function of time  $t$ ,  $(\phi(t), \theta(t), \omega(t))$ , where  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\theta(t), \phi(t))$  gives the pointing direction of the beam and  $\omega(t)$  is the rotation angle around the pointing direction  $\hat{\mathbf{n}}$  which specifies the orientation of an asymmetric beam (eg, the major axis orientation for an elliptical Gaussian beam) with respect to a fix reference orientation (eg,  $\omega(t=0)$ ).

Accordingly, the rotation operator  $D(\phi, \theta, \omega)$  acts on the beam so that it takes all possible orientations with respect to a fix reference frame in the sky [40], [9]. Simple scanning strategies allow a convenient decomposition of the rotation matrix  $D(\phi(t), \theta(t), \omega(t))$  for the implementation of fast methods to compute the full-sky convolution [40], [9]. In what follows we shall suppress the time dependence of the Euler angles to simplify notation.

Decomposing the polarization field in spin harmonics one finds the following expressions for the Stokes parameters of the beam convolved with the sky (see Eq.(5) of [40] and Eq.(39) of [9]).

$$T_{eff} = \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^* a_{\ell m} \quad (30)$$

$$Q_{eff} = 2 \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^{G*} a_{\ell m}^G \quad (31)$$

$$U_{eff} = 2 \sum [D_{mM}^\ell(\phi, \theta, \omega)]^* b_{\ell M}^{C*} a_{\ell m}^C \quad (32)$$

where we define,  $a_{\ell m}^G = (a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m})/2\sqrt{2}$  and  $ia_{\ell m}^C = (a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m})/2\sqrt{2}$ .

Note that for the linear polarization parameters  $Q, U$ , an overall factor of 2 accounts for the fact that both  $G$  and  $C$  modes contribute equally to the transform of an elliptical beam.

The polarization correlation matrix can be easily computed making use of symmetry properties of the rotation matrices and the addition theorem of rotations (see Appendix 3),

$$\langle T_1 T_2 \rangle = \sum_\ell b_\ell^{TT} C_\ell^T \quad (33)$$

$$\langle T_1 Q_2 \rangle = 2 \sum_\ell b_\ell^{TG} C_\ell^{TG} \quad (34)$$

$$\langle T_1 U_2 \rangle \propto C_\ell^{TC} = 0 \quad (35)$$

$$\langle Q_1 U_2 \rangle \propto C_\ell^{GC} = 0 \quad (36)$$

$$\langle Q_1 Q_2 \rangle = 4 \sum_\ell b_\ell^{GG} C_\ell^G \quad (37)$$

$$\langle U_1 U_2 \rangle = 4 \sum_\ell b_\ell^{CC} C_\ell^C \quad (38)$$

where we have used the fact that  $C_\ell^{TC} = C_\ell^{GC} = 0$  as follows from the general property that the  $T, G$  harmonic coefficients of a field transform differently under parity than the  $C$  harmonics. The power spectra are defined as,

$$\langle a_{\ell m}^{P*} a_{\ell' m'}^P \rangle = C_\ell^P \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad , \quad P = T, G, C \quad (39)$$

and we have introduced the “2-point window functions”,

$$b_\ell^{P P'} = \sum_{M M'} D_{M' M}^\ell b_{\ell M}^{P*} b_{\ell M'}^{P'} \quad ; \quad P = T, G \quad (40)$$

where hereafter we drop the tilde to denote beam quantities, (i.e. we take  $\tilde{P} \rightarrow P$ ) to ease notation. We remind that the first non-vanishing contributions to the total intensity  $b_{\ell m}^T = b_{\ell m}$  enter at  $m = 0$ , while linear polarization beams  $b_{\ell m}^G$  have the first non-zero contributor from  $m = 2$ .

The rotation matrix  $D_{M'M}^\ell$  above reads (see Eq.(2) in §4.7.1 and Eq.(5) in §4.7.2 of [39])

$$D_{M'M}^\ell(\alpha - \omega_2, \beta, \gamma - \omega_1) = d_{M'M}^\ell(\beta) e^{-i[M'(\alpha - \omega_2) + M(\gamma - \omega_1)]} \quad (41)$$

where the Euler angles  $(\alpha, \beta, \gamma)$  of the resulting rotation matrix are (Eq.(6) in §4.7.2 of [39]; see also [34]),

$$\begin{aligned} \cot \alpha &= \cos \theta_2 \cot(\phi_1 - \phi_2) - \cot \theta_1 \sin \theta_2 \csc(\phi_1 - \phi_2) \\ \cos \beta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \csc(\phi_1 - \phi_2) \\ \cot \gamma &= \cos \theta_1 \cot(\phi_1 - \phi_2) - \cot \theta_2 \sin \theta_2 \csc(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (42)$$

and the orientation of the beam at pixels 1 and 2 is given by  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . The *irreducible* rotation matrices (see Eq.(2.17) of [7] and Eq.(4) in §4.3.1 of [39]), read

$$\begin{aligned} d_{nm}^\ell(\beta) &= \sum_t (-1)^t \frac{[(\ell + n)!(\ell - n)!(\ell + m)!(\ell - m)!]^{1/2}}{t!(\ell + n - t)!(\ell - m - t)!(t + m - n)!} \\ &\quad \times (\cos \beta/2)^{2\ell + n - m - 2t} (\sin \beta/2)^{2t + m - n} \end{aligned} \quad (43)$$

where  $t$  is summed up for all values which yield non-negative factorials. These matrices give the dependence of the polarization correlation functions on the separation (or lag) angle in the sky  $\beta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$ . Thus, predictions for the polarization correlation matrix for cosmological models of the sky signal convolved with an elliptical window assuming a particular scanning strategy are given by Eqs(9),(23),(42) & (43).

The polarization correlation matrix thus obtained can be used to compute the likelihood functions and the Fisher information matrix for a given sky realization of a cosmological model convolved with an elliptical beam.

### A. Slightly Elliptical Beams

Provided the beam ellipticity is small ( $\chi \ll 1$ ) a first order ellipticity correction to the circular Gaussian beam yields a good approximation to the elliptical beam transform (see §III). Consistently, one can expand the polarization correlation functions to first order in the ellipticity expansion.

For this purpose, first we need to explicit the first terms of the 2-point window,

$$b_\ell^{PP'} = D_{00}^\ell b_{\ell 0}^P b_{\ell 0}^{P'} + D_{02}^\ell b_{\ell 0}^P b_{\ell 2}^{P'} + \dots \quad (44)$$

where we have taken the real part of the 2-point function as we want to compute the polarization correlation functions which are observable and therefore real. Eq.(44) for the case of the total intensity ( $P = T$ ) is in agreement with Eq.(33) in [34]. Introducing the expansion of the (1-point) windows  $b_{\ell m}^\ell$  to first order in the ellipticity Eqs(12),(13),(25) & (26) into Eq.(44) one obtains the following expressions for the correlation functions,

$$\begin{aligned} \langle T_1 T_2 \rangle &= \sum_\ell C_\ell^T \left[ D_{00}^\ell + \frac{\chi}{2} \ell^2 \sigma^2 (D_{02}^\ell - D_{00}^\ell) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} -\langle T_1 Q_2 \rangle &= \sqrt{2} \sum_\ell C_\ell^{TG} \\ &\quad \times \left[ D_{02}^\ell + \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 (D_{04}^\ell + D_{22}^\ell - 4D_{02}^\ell) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_1 Q_2 \rangle &= \sum_\ell C_\ell^Q \left[ D_{22}^\ell + \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 (D_{24}^\ell - 2D_{22}^\ell) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \langle U_1 U_2 \rangle &= \sum_\ell C_\ell^U \left[ D_{22}^\ell + \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 (D_{24}^\ell - 2D_{22}^\ell) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{2\ell + 1}{4\pi} \right) e^{-\ell^2 \sigma^2} + \mathcal{O}(\chi^2) \end{aligned} \quad (48)$$

where the sum involving the rotation matrices  $D_{M'M}^\ell$  is restricted to  $\ell \geq M + M'$ , and

$$\begin{aligned} D_{00}^\ell &= d_{00}^\ell(\beta) = P_\ell(\cos \beta) \\ D_{02}^\ell &= d_{02}^\ell(\beta) [\cos 2\alpha + \cos 2\gamma] \\ D_{22}^\ell &= d_{22}^\ell(\beta) \cos 2(\alpha + \gamma) \\ &\quad + (-1)^\ell d_{22}^\ell(\pi - \beta) \cos 2(\alpha - \gamma) \\ D_{04}^\ell &= d_{04}^\ell(\beta) [\cos 4\alpha + \cos 4\gamma] \\ D_{24}^\ell &= d_{24}^\ell(\beta) [\cos(2\alpha + 4\gamma) + \cos(4\alpha + 2\gamma)] \\ &\quad + (-1)^\ell d_{24}^\ell(\pi - \beta) [\cos(2\alpha - 4\gamma) + \cos(4\alpha - 2\gamma)] \end{aligned} \quad (49)$$

where we have to replace  $\alpha \rightarrow \alpha - \omega_2, \gamma \rightarrow \gamma - \omega_1$  to introduce the beam orientation in the above equations, as determined by Eq.(41). We have used the symmetry properties of the  $d$ -rotation matrices (see §4.4 Eq.(1) in [39])  $d_{MM'}(\beta) = (-1)^{M'-M} d_{MM'}(\beta), d_{M-M'}(\beta) = (-1)^{l+M} d_{MM'}(\pi - \beta)$ , and the reality condition on the correlations functions. The *irreducible*  $d_{sm}$ -matrices can be expressed in terms of Legendre Polynomials by relating the previous to the spin- $s$  harmonics (see Eqs(3.4), (3.11) in [13]),

$$d_{sm}^l(\beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} {}_{-s}Y_{lm}(\beta, 0) \quad (50)$$

For  $s = 0, 2$  one gets (see Eqs(A4) & (B2)),

$$d_{0m}^l(\beta) = \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \beta),$$

$$d_{2m}^l(\beta) = 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} {}_{-2}P_\ell^m(\cos \beta) \quad (51)$$

and  ${}_{-2}P_\ell^m(\cos \beta)$  are given in Eq.(B4). This explicitly shows that the ellipticity (asymmetry) of the window function introduces a dependence of the correlation functions on the scanning strategy, as parameterized by the angles  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . We stress that the above equations are appropriate for a full-sky analysis, since the small-angle approximation is only taken for the beam geometry (which is of small extent in radians).

In Fig 5 we display the temperature correlation function  $\langle TT \rangle$  (we drop sub-indices labeling sky pixels to ease notation) for a slightly elliptical beam Eq.(33). We assume a flat power spectrum,  $C_\ell = \text{Constant}$ . This allows us to emphasize the effect of the window function irrespective of the underlying cosmological model assumed. For the case shown in Fig 5, we assume that the telescope scans the sky in ecliptic latitude (*i.e.*  $\alpha = \gamma = 0$ ) and that the beam hits a given sky pixel always with the same orientation (*i.e.* we consider correlated pixels for beams aligned in the sky) which provides an upper limit to the effect of ellipticity on the correlation functions. This is because scanning strategies which observe a given sky pixel with a different orientation of the beam each time it scans over it, tend to average out the impact of beam asymmetry on full-sky estimators.

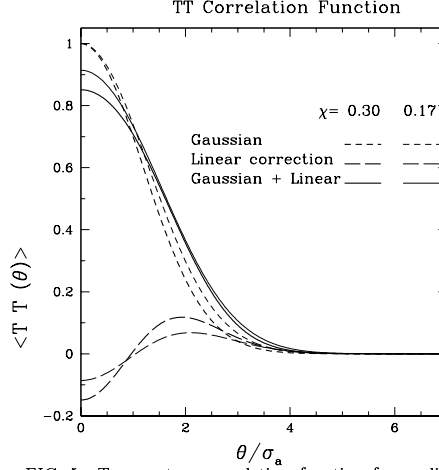


FIG. 5. Temperature correlation function for a slightly elliptical beam. It assumes a flat power spectrum,  $C_\ell = \text{constant}$ . (Short dashed line) Correlation function for a circular Gaussian beam. (Long dashed) Linear Ellipticity correction assuming the beam scans the sky in ecliptic latitude and a fixed beam orientation in the sky. (Solid) Total correlation function (Gaussian + linear correction). Thick lines assume  $\chi = 0.3 (\sigma_a/\sigma = 1.2)$  while thin lines correspond to  $\chi = 0.17 (\sigma_a/\sigma = 1.1)$ .

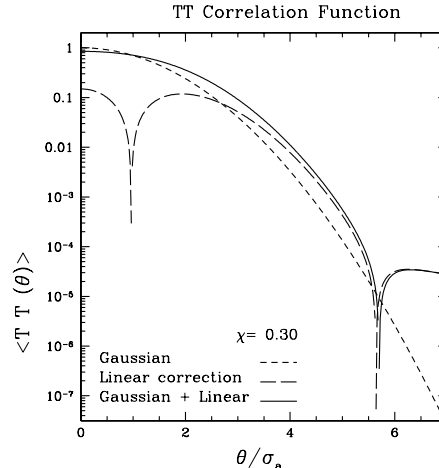


FIG. 6. Same as Fig 5 but for the absolute value of the correlations in log scale to emphasize small residual correlations induced by the beam at large angular separations. Only lines for an ellipticity of  $\chi = 0.3$  are shown for clarity.



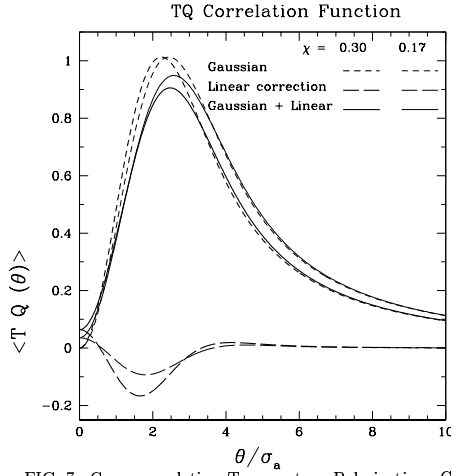


FIG. 7. Cross-correlation Temperature-Polarization. Conventions are the same than in Fig 5.

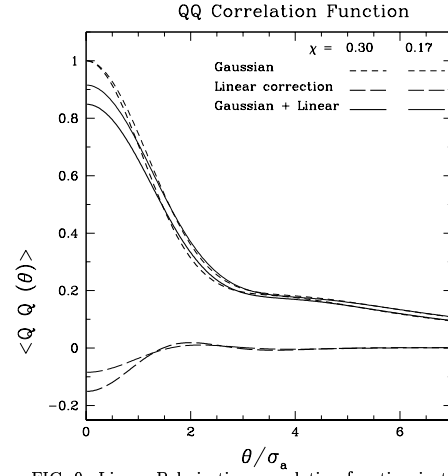


FIG. 9. Linear Polarization correlation function in terms of the Stokes Q parameter. Note that for the case shown (a flat power spectrum),  $\langle QQ \rangle = \langle UU \rangle$ . Conventions are the same than in Fig 5.

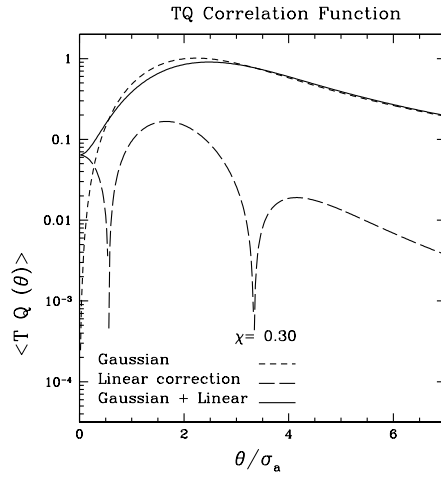


FIG. 8. Same as Fig 7 but in log scale.

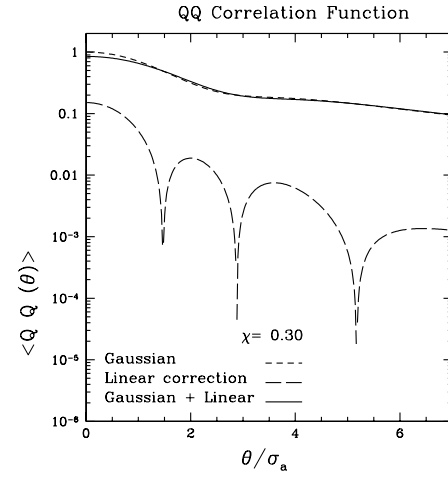


FIG. 10. Same as Fig 9 but in log scale.

As seen in the plots, the linear ellipticity correction to the circular Gaussian window introduces an anti-correlation for pixels separated by  $\theta \leq \sigma_a$  (the major axis beam-width). This is because pixels within this angular separation are seen as a single *smeared pixel*. Alternatively, for  $\theta \geq \sigma_a$  the ellipticity increases the correlation between sky pixels. This correlation peaks at  $\theta = 2\sigma_a$ , where it yields a 20% correction (for  $\chi = 0.3$ ) to the Gaussian correlation function and decreases monotonously for larger distances, as expected. However, a closer look (see Fig 6) reveals that some small residual anti-correlations induced by the ellipticity (at the level of  $10^{-5}$ ) remain at large distances which might be a reflexion of the limitations of a linear order analysis. Non-linear terms in the ellipticity expansion are expected to cancel out these long-range correlations.

Cross-correlations for temperature-polarization and linear polarization auto-correlation functions are shown in Figs (7),(8) & (9),(10), respectively. In particular, we see that the effect of ellipticity is comparable for the temperature auto-correlation  $\langle TT \rangle$  and cross-correlation functions  $\langle TQ \rangle$  (at most a 15% correction to the Gaussian correlation for  $\chi = 0.3$ ), while tends to be less significant for the linear polarization  $\langle QQ \rangle$  (just a few percent correction). Notice that the angular scale for the transition between negative and positive ellipticity-induced correlations (first and second bumps in the log-scale plots) is shifted in the correlations involving linearly polarized windows with respect to the case for the temperature (or total intensity) discussed above (see Figs (5) & (6)).

## VII. COVARIANCE MATRIX

In this section we shall discuss the covariance of the power spectra for elliptical beams in the presence of uncorrelated<sup>§</sup> noise, following the standard formalism developed for circular windows [21] (see also [19], [20], [33], [44], [42] & [28]). In particular, we shall use this formalism to estimate error-bars for the power-spectra for elliptical window functions. For this purpose we shall assume that the circular mode of an elliptical window, which has a *non-Gaussian* profile, yields an approximately unbiased estimate of the actual error-bars, as we shall argue below.

The covariance of the temperature power spectrum,  $C_\ell^T$  can be easily computed for the circular mode ( $m = 0$ ) of the window function [21]

$$\Delta(C_\ell^T) = \sqrt{\frac{2}{(2\ell+1)\Delta\ell f_{sky}}} \left( C_\ell^T + w^{-1} (b_{\ell 0}^T)^{-2} \right). \quad (52)$$

<sup>§</sup>the noise is assumed to be uncorrelated between different pixels and between temperature and linear polarization measurements.

Similarly for linear polarization, one obtains from the lowest  $m$ -mode contribution ( $m = \pm 2$ ) [20], [44],

$$\Delta(C_\ell^P) = \sqrt{\frac{2}{(2\ell+1)\Delta\ell f_{sky}}} \left( C_\ell^P + w^{-1} (2 b_{\ell 2}^G)^{-2} \right) \quad (53)$$

where  $P = G, C$ , and for the cross-spectra

$$\begin{aligned} \Delta(C_\ell^{TG}) &= \sqrt{\frac{1}{(2\ell+1)\Delta\ell f_{sky}}} \left[ (C_\ell^{TG})^2 \right. \\ &\quad + \left( C_\ell^T + w^{-1} (b_{\ell 0}^T)^{-2} \right) \\ &\quad \times \left. \left( C_\ell^G + w^{-1} (2 b_{\ell 2}^G)^{-2} \right) \right]^{1/2} \quad (54) \end{aligned}$$

where the factor of 2 in the polarization windows accounts for equal contributions from  $m = \pm 2$ . The factors  $\Delta\ell$  and  $f_{sky}$  in the above expressions account for the binning in  $\ell$ -space used (we assumed  $\Delta\ell = 75$  for all experiments) and the fraction of the sky observed by the experiment, respectively. The weight per solid angle is  $w \equiv (\sigma_{pix}^2 \omega_{pix})^{-1}$  while the noise per pixel  $\sigma_{pix} = s/\sqrt{t_{pix}}$  depends on the detector sensitivity  $s$  and the observing time per pixel  $t_{pix}$ . The pixel solid angle  $\omega_{pix} = \theta_{FWHM} \times \theta_{FWHM}$ . The above expressions for the noise associated to power spectra estimation, Eqs.(52)-(54) assume that all detectors in the experiment have the same noise properties and main beam response.

Note that polarization power spectra have twice as much noise per pixel as the temperature spectrum since only half of the total power is available to each polarization mode (G and C). This is accounted for through the normalization of the window functions (see factor  $\sqrt{2}$  in Eq.(16)).\*\*

We stress that the above expressions only include the leading order in the  $m$ -mode expansion of the elliptical window. However this is a good approximation to (*i.e.*, it is the dominant term in) the exact window function for elliptical beams as discussed in §III. In principle, this analysis could be rigorously extended to include higher  $m$ -modes of the window by computing the  $a_{\ell m}$ 's of the sky map convolved with the elliptical window, from which the power spectra of the convolved map and their associated errors can be calculated (see appendix A.2 in [16]). However thorough numerical analyses ([41]; see also [8]) show that an azimuthally symmetrized component of the window yields an unbiased estimate of the power spectrum within a few percent, what suggests that non-circular modes of the window function can be safely neglected, at least for slightly elliptical beams.

\*\*Alternatively, one can define different pixel weights  $w$  for temperature and linear polarization,  $w^P = 2 w^T$  (see *e.g.* [20])

Predictions for the theoretical error-bars for the temperature power spectrum for current CMB experiments are shown in Fig 11. Experimental parameters are taken from [15], [23] (MAXIMA-1), [27], [31] (Boomerang), [3] (Archeops) and [36] (Planck). The figures used correspond to averages among channels and they only intend to be illustrative. Note that for Archeops and Planck the experimental numbers given are just nominal. It is seen that the pixel noise blows up the error bars at multipoles  $\ell \approx 1000$ , except for the Planck satellite experiment. Main differences between error forecasts for different experiments are due to the sky coverage and noise per pixel (for a single channel). It is also observed that the error bars computed for a Gaussian window underestimate those of an elliptical window (computed according to Eq.(12). However to first order, the error bars for an elliptical beam can be well approximated by using an *effective Gaussian window* of the form  $b_{\ell 0} = \exp[-\ell^2 \sigma_a \sigma / 2]$ , where  $\sigma_a$  and  $\sigma$  are the major and minor axis of the ellipses of constant beam response.

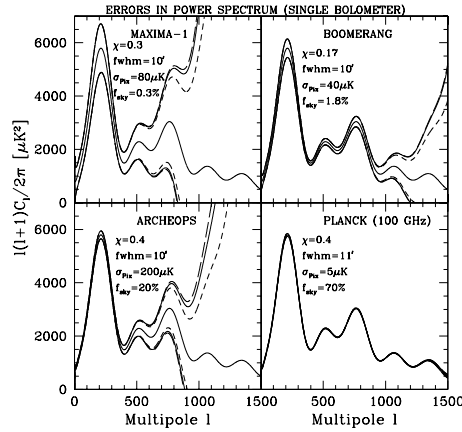


FIG. 11. Errors in the power spectrum estimation for current and future experiments. It assumes an underlying standard  $\Lambda$ CDM model. Pairs of lines (above and under the mean power spectrum) show different estimates for the theoretical error bars according to different choices of the window function: short-dashed lines are predictions for a circular Gaussian window of beam-width given by the minor axis of the ellipse  $\sigma$ , solid lines correspond to the elliptical window to first order, Eq.(12), while long-dashed lines are obtained from an *effective circular Gaussian window* of beam-width  $\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_a \sigma}$ , being  $\sigma_a$  the major axis of the ellipse. In all cases, a binning in  $\ell$ -space is used of width  $\Delta\ell = 75$ .

A detailed analysis of the expected error bars in the power spectra estimation including polarization for Planck (single 100 GHz channel) is summarized in Fig 12.

As discussed above, the high sensitivity of Planck allows a clean recovery of the CMB power spectra up to  $\ell \gtrsim 1000$  with a single channel data (except for the C-polarization mode, see below). In fact, pixel noise starts blowing up the error bars for the temperature anisotropy power spectrum at  $\ell \gtrsim 1500$  (see upper panel in Fig12). For the cross-spectrum temperature-polarization (G-mode) one finds that pixel noise becomes dominant at  $\ell \gtrsim 1000$  (see middle panel) whereas for polarization (G-mode), this happens at lower multipoles  $\ell \approx 1000$  (see lower panel). We have checked (although is not shown in Fig 12 for clarity sake) that for the polarization C-mode error bars become pixel-noise dominated at  $\ell \lesssim 500$  as the signal is typically (*i.e.* for standard CDM models) found at a few percent level of that in the G-mode.

Beyond these multipoles (*i.e.* for smaller scales) the effect of the ellipticity of the window becomes significant. Moreover, using a circular Gaussian window clearly underestimates error bars for elliptical beams approximately computed according to Eqs.(12) & (25) for the total intensity and linear polarization windows, respectively.

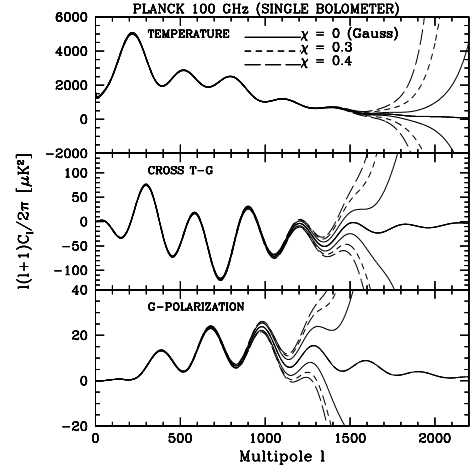


FIG. 12. Errors in the power spectrum estimation from a single 100 GHz detector of the Planck satellite. It assumes the same experimental parameters than those given in Fig 11 (bottom right panel). Solid lines show the mean theoretical power spectra and their error bars for realizations of the sky convolved with a Gaussian beam. Dashed lines show the analog error bars for the case of an Elliptical beam. Upper panel displays the temperature anisotropy power spectrum, middle panel shows the cross temperature-polarization (in terms of the G-mode), while the bottom panel corresponds to the polarization (G-mode).

## VIII. DISCUSSION

As cosmic microwave background (CMB) experiments image the sky at finer spatial resolution with higher sensitivity, new relevant systematic effects have to be properly taken care of in the process of data analysis in order to consistently extract cosmological information down to the smallest scales probed by the experiment. The asymmetry of the beam response is becoming an increasingly important issue which has been largely neglected until recently in CMB studies.

In this paper we have introduced an analytic approach to describe the effect of beam ellipticity in CMB experiments. This approach is based on a perturbative expansion around the geometry of a circular Gaussian beam, which yields a series expansion of the elliptical Gaussian beam in powers of the ellipticity parameter. There are several advantages of introducing a perturbative approach to discuss beam ellipticity:

- It provides a simple and convenient way of integrating the beam harmonic transform for the total intensity and linear polarization.
- In most of current experiments the beam ellipticity is small (we shall refer to these as “slightly elliptical beams” in what follows), i.e., the beam fullwidths along the major and minor axis differ by 10-20 % at most. This implies that, in practice, the perturbative expansion truncated to low orders describes the harmonic transform with high accuracy up to very high multipoles.
- The perturbative expansion allows a simple qualitative discussion of the role that different  $m$ -modes play in the beam transform (see e.g., section III). In particular, the relative weight of these modes is assessed by working out how they depend on experimental parameters (e.g., width and ellipticity of the beam). This information cannot be directly extracted from a non-perturbative solution.
- The full-sky polarization correlation matrix can be most simply discussed for the “slightly elliptical beams” for which deviations from the circular Gaussian beam results can be explicitly derived.

In particular, we have obtained analytic solutions for both the total intensity (temperature anisotropy) and linear polarization window functions. The main results are given in §II, Eq.(9) & §V, Eq.(23).

Our findings show that the circular ( $m = 0$ ) mode dominates the total intensity window function, although the first non-circular (higher  $m$ ) modes can not be neglected in a consistent analysis. The reason for the latter is that higher  $m$ -modes in the beam transform can be identified amongst the higher-order corrections in the ellipticity expansion around the circular Gaussian window. This provides a simple explanation for previous semi-analytic and numerical results in the literature.

For linear polarization, we found that  $m = 2$  is the dominant mode but again, higher modes ( $m = 2, 4, \dots$ ) must be included to compute accurately the window function.

Numerical integration validates our approach and provides practical prescriptions for how many terms in the perturbative expansion of the circular mode of the window have to be taken to achieve a given accuracy. This in turn translates directly in how many non-circular (higher- $m$ ) modes contribute non-negligibly to the window function of the elliptical beam (see §IV A).

We have implemented our analytic solutions for the elliptical window function to derive expressions for the full-sky polarization correlation functions for elliptical beams (see §VI). In particular, we have derived simple analytic expressions for slightly elliptical beams, taking into account the beam orientation and scanning strategy of a given experiment. We find that, for simple scanning strategies, the ellipticity of the beam induces additional correlations of the order of 20% for small angular separations (few beam-widths) with respect to a circularly symmetric Gaussian beam.

Finally, we have investigated the impact of beam asymmetry in error estimation for CMB power spectra in the presence of uncorrelated noise. We find that error bars for a circular Gaussian window largely underestimate those of an elliptical window when the pixel noise becomes dominant. However, a good approximation to the actual error bars is given by an *effective circular Gaussian* window of beam-width  $\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_a \sigma}$ , being  $\sigma_a$  and  $\sigma$  the major and minor axis of the ellipse. Note that, for slightly elliptical beams ( $\chi \rightarrow 0$ ),  $\sigma_{eff} \approx \sigma(1 + \chi/4)$  which is approximately the width of the circular mode of the elliptical window,  $b_{l0}$ , as discussed in §II. This explains why for quasi-circular windows,  $\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_a \sigma}$ , provides an accurate estimate of the power spectra error-bars.

We shall emphasize that, in our approach, we introduce the experimental beam in the *time stream*, while the “effective beam” in the *pixel domain* is the result of multiple observations of the same sky-pixel with different orientations of the beam (and possibly with a different noise level), for general scanning strategies. This implies that non-circular modes of the “effective beam” are expected to cancel out to some extent and therefore the “effective” circular component of the beam should yield an almost unbiased estimate of the  $C_\ell$ , as shown by recent numerical analysis (see Wu et al 2001). Therefore the nominal ellipticity in the time domain will be typically larger than the final “effective” ellipticity on the map. In the discussion of the estimated errors in the power-spectrum presented in §VII, we take the “effective” ellipticity to be the same than the one defined in the time stream and thus our estimates must be taken only as upper limits to the actual effect of window ellipticity.

The issue of beam asymmetry here discussed is particularly relevant for future high-resolution and sensitivity CMB anisotropy experiments, especially those measuring also polarization, such as the Planck satellite.

In a future work [12], we shall validate the elliptical model for the beam asymmetry presented here in the presence of other systematic effects (non-elliptic beam distortion/asymmetry, pointing errors, other sources of noise, etc). Such analysis will show under which circumstances beam ellipticity is a major systematic effect in a realistic analysis of a CMB experiment. Some recent work along this lines has already been done for the Planck satellite [10], although the formalism used is only valid for small-patches of the sky.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank E. Elizalde, E. Hivon, R. Juszkiewicz, S. Prunet, E. Simonneau, and especially R. Stompom and R. Teyssier for many useful comments and discussions. We also want to thank an anonymous referee for pointing out some issues which helped us improving the manuscript. PF acknowledges a CMBNET Research Fellowship from the European Comission.

#### APPENDIX A: PERTURBATIVE EXPANSION OF THE ELLIPTICAL BEAM HARMONIC TRANSFORM

In this appendix we present the key steps for the derivation of the spherical harmonic transform for the total intensity beam Eq.(9).

In the flat-sky limit ( $\theta \rightarrow 0$ ) the elliptical beam shape can be expressed in cartesian (x,y),

$$B(x, y) = B_0(\sigma_a, \sigma_b) \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_a^2} - \frac{y^2}{2\sigma_b^2}\right] \quad (\text{A1})$$

where we define  $\sigma_a$  and  $\sigma_b$  as the beam-widths in the major x and minor y axis, and the normalization is given by  $B_0(\sigma_a, \sigma_b) = 1/(2\pi\sigma_a\sigma_b)$ .

For analysis on the sphere, it is more convenient to introduce (planar) polar coordinates to describe the beam,  $x = \theta \cos \phi$  and  $y = \theta \sin \phi$ ,

$$B(\theta, \phi) = B_0 \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_b^2} f(\phi)\right] \quad (\text{A2})$$

where  $f(\phi) \equiv 1 - \chi \cos^2 \phi$  describes deviations from the circular (or axisymmetric) Gaussian window and the ellipticity parameter  $\chi \equiv 1 - (\sigma_b/\sigma_a)^2$ , is defined within the range  $1 \geq \chi \geq 0$ . The circular Gaussian window is thus recovered for the limiting case  $\chi = 0$ . For the sake of simplicity, we have taken the beam to be pointing to the north pole of the sphere ( $\theta = 0$ ).

The spherical harmonic transform of the total intensity beam is defined as,

$$b_{\ell m} = \int d\Omega B(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \quad (\text{A3})$$

where,  $d\Omega = d\theta \sin \theta d\phi$ , and spherical harmonics are defined as,

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = N_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A4})$$

$$N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \quad (\text{A5})$$

where  $P_{\ell}^m$  are the Legendre polynomials and the spherical harmonics obey the conjugation property  $Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell -m}$ . Replacing Eq.(A4) in Eq.(A3) we get,

$$b_{\ell m} = (-1)^m N_{\ell -m} \times \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\ell}^{-m}(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi B(\theta, \phi) e^{im\phi} \quad (\text{A6})$$

In the flat-sky limit ( $\theta \ll 1$  rad,  $\ell \gg 1$ ),

$$P_{\ell}^{-m}(\cos \theta) \approx \ell^{-m} J_m(\ell \theta) \quad (\text{A7})$$

where  $J_m$  is the m-th order Bessel function of the first kind. In this limit, the above integral Eq.(A6) reads,

$$b_{\ell m} = (-1)^m N_{\ell -m} \ell^{-m} \int_0^\pi d\theta \theta J_m(\ell \theta) \int_0^{2\pi} d\phi B(\theta, \phi) e^{im\phi} \quad (\text{A8})$$

In order to solve this integral analytically, we introduce a convenient perturbative expansion of the beam in real space in powers of the ellipticity parameter  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} B(\theta, \phi) &= B_0 B(\theta) \exp\left[\chi \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \cos^2 \phi\right] \\ &= B_0 B(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right)^n \cos^{2n} \phi \frac{\chi^n}{n!} \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

being  $B(\theta) = \exp[-\theta^2/2\sigma^2]$ , which yields an analogous series in harmonic space,

$$b_{\ell m} = \sum_n b_{\ell m}^{(n)} \frac{\chi^n}{n!} = b_{\ell m}^{(0)} + b_{\ell m}^{(1)} \chi + \mathcal{O}(\chi^2) \quad (\text{A10})$$

The perturbative expansion Eq.(A9) allows to factorize the 2D-integrals of the beam harmonic transform Eq.(A6) in two 1D-integrals for  $\theta$  and  $\phi$  respectively. Thus the n-th order term of the beam transform can be expressed as follows:

$$b_{\ell m}^{(n)} = (-1)^m N_{\ell -m} I_{\ell m}^{(n)} K_m^{(n)} \quad (\text{A11})$$

with,

$$I_{\ell m}^{(n)} = \ell^{-m} (2\sigma^2)^{-n} \int_0^\pi d\theta \theta^{2n+1} J_m(\ell \theta) B(\theta) \quad (\text{A12})$$

$$K_m^{(n)} = \int_0^{2\pi} d\phi \cos^{2n} \phi e^{-i2m\phi} \quad (\text{A13})$$

Making use of Eq.(6.631.1) of [14] and Eqs(13.1.27), (13.6.9) of [1] one gets,

$$I_{\ell m}^{(n)} = \sigma^{2+m} \frac{(n-m/2)!}{2^{m/2}} e^{-z} L_{n-m/2}^{(m)}(z) \quad (\text{A14})$$

with  $z = \ell^2 \sigma^2 / 2$  and,

$$K_m^{(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{2n!}{(n+m/2)!(n-m/2)!} \quad (\text{A15})$$

for  $m$  even, and  $K_m^{(n)} = 0$  for  $m$  odd. The fact that odd  $m$ -modes do not contribute to the harmonic transform is due to the parity symmetries of the ellipse. Thus the  $n$ -th order term of the expansion Eq.(A11) is given by,

$$b_{\ell m}^{(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n+m/2}} N_{\ell-m} \frac{2n!}{(n+m/2)!} \sigma^{2+m} e^{-z} L_{n-m/2}^{(m)}(z) \quad (\text{A16})$$

which replaced in Eq.(A17) yields the final expression,

$$b_{\ell m} = \sigma^m N_{\ell m}^I e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m} L_{\nu}^{(m)}(z) \chi^{\nu+m/2} \quad (\text{A17})$$

where we define  $N_{\ell m}^I = N_{\ell-m}/\bar{B}_0$ ,  $\bar{B}_0 = B_0/(2\pi\sigma^2)$ , and  $\gamma_{\nu, m} = (2\nu+m)!/(2^{2\nu+3m/2}(\nu+m/2)!(\nu+m)!)$ . The first Laguerre Polynomials are,

$$\begin{aligned} L_0^{(m)}(z) &= 1 \quad ; \quad L_1^{(m)}(z) = m+1-z \\ L_2^{(m)}(z) &= \frac{1}{2} [(m+1)(m+2) + z(-4-2m+z)] \\ L_3^{(m)}(z) &= \frac{1}{6} [(m+1)(m+2)(m+3) \\ &\quad + z(-3(m+2)(m+3) + z(9+3m-z))] \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

and higher-orders can be obtained from the recurrence relation (see Eq.(4.18.1) in [22])

$$L_n^{(m)}(z) = \frac{1}{n} [(2n-1-x+m)L_{n-1}^{(m)}(z) - (n-1+m)L_{n-2}^{(m)}(z)] \quad (\text{A19})$$

In most practical situations the beam ellipticity is rather small,  $\chi \ll 1$ . In these cases, one only needs to compute the first terms (2 or 3 terms account for the beam transform up to very large multipoles with high accuracy, see §IV C, Table IV C)

For example, the beam harmonic transform up to *second order* in the ellipticity expansion has non-vanishing contributions only from the modes  $m = 0, 2$  and  $4$ , which read,

$$\begin{aligned} b_{\ell 0} &= N_{\ell 0} e^{-\ell^2 \sigma^2 / 2} \left[ 1 - \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi^2}{4} \left( -\ell^2 \sigma^2 + \frac{3}{16} \ell^4 \sigma^4 \right) \right] \\ b_{\ell 2} &= N_{\ell 0} \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 e^{-\ell^2 \sigma^2 / 2} \left[ 1 + \chi \left( 1 - \frac{1}{4} \ell^2 \sigma^2 \right) \right] \\ b_{\ell 4} &= N_{\ell 0} \frac{\chi^2}{128} \ell^4 \sigma^4 e^{-\ell^2 \sigma^2 / 2} \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

where  $N_{\ell 0} = \sqrt{2\ell + 1/4\pi}$ , and negative modes (*i.e.*  $m = -2, -4$ ) have to be included as they have the same harmonic transform than positive modes, *i.e.*  $b_{\ell -m} = b_{\ell m}$ . Similar expressions for the harmonic transform to *first order* in the ellipticity are given in §III, Eqs.(12) & (13). Note that for a circular Gaussian window,  $\chi = 0$ , one gets as expected,  $b_{\ell 0} = N_{\ell 0} \exp[-\ell^2 \sigma^2 / 2]$  and  $b_{\ell m} = 0$  for  $m \neq 0$ .

## APPENDIX B: PERTURBATIVE EXPANSION OF THE LINEARLY POLARIZED ELLIPTICAL BEAM HARMONIC TRANSFORM

The aim of this appendix is to provide a detailed derivation of the harmonic transform for linearly polarized elliptical beams Eq.(23). The spherical harmonic transform of a linearly polarized beam can be written in terms of the Stokes parameters  $\tilde{Q}$  &  $\tilde{U}$ ,

$$\begin{aligned} b_{\ell m}^G &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\Omega [(\tilde{Q} - i\tilde{U})_2 Y_{\ell m}^* + (\tilde{Q} + i\tilde{U})_{-2} Y_{\ell m}^*] \\ b_{\ell m}^C &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \int d\Omega [(\tilde{Q} - i\tilde{U})_2 Y_{\ell m}^* - (\tilde{Q} + i\tilde{U})_{-2} Y_{\ell m}^*] \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

where we define the spin-2 spherical harmonics as <sup>††</sup>

$$\pm_2 Y_{\ell m} = M_{\ell m} \pm_2 P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (\text{B2})$$

where

$$M_{\ell m} = 2 \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} N_{\ell m} \quad (\text{B3})$$

and we define a generalization of the Legendre polynomials for spin-2 harmonics, <sup>††</sup>

$$\begin{aligned} \pm_2 P_{\ell}^m(\cos\theta) &= -\left( \frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2} \ell(\ell-1) \right) P_{\ell}^m(\cos\theta) \\ &\quad + (\ell+m) \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} P_{\ell-1}^m(\cos\theta) \\ &\quad \mp \frac{m}{\sin^2\theta} \left( (\ell-1) \cos\theta P_{\ell}^m(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. - (\ell+m) P_{\ell-1}^m(\cos\theta) \right) \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

The above quantities obey the following parity conditions:

$$\pm_2 P_{\ell}^{-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \pm_2 P_{\ell}^m \quad (\text{B5})$$

<sup>††</sup>Note that  $\pm_2 Y_{\ell m} = W_{\ell m} \pm i X_{\ell m}$ , according to the notation used by [20].

<sup>††</sup>The  $\pm_2 P_{\ell}^m$  polynomials are simply related to the  $G_{\ell m}$  in [35], [20], [42]:  $\pm_2 P_{\ell}^m(x) = G_{\ell m}^+(x) \mp G_{\ell m}^-(x)$ .

$$M_{\ell-m} = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} M_{\ell m} \quad (\text{B6})$$

which imply that,

$$\pm 2 Y_{\ell m}^* = \mp 2 Y_{\ell m} e^{-2im\phi} \quad (\text{B7})$$

what allows us to recast Eq.(B1) in a more convenient way,

$$\begin{aligned} b_{\ell m}^G &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2Y_{\ell m} + (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2}Y_{\ell m} \right] e^{-2im\phi} \\ b_{\ell m}^C &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \int d\Omega \left[ (\tilde{Q} - i\tilde{U}) {}_2Y_{\ell m} - (\tilde{Q} + i\tilde{U}) {}_{-2}Y_{\ell m} \right] e^{-2im\phi} \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

For a pure co-polar beam (ie, for an ideal optical system and telescope, see [9]), we have

$$\tilde{Q} \pm i\tilde{U} = -B(\theta, \phi) e^{\pm 2i\phi} \quad (\text{B9})$$

where  $B(\theta, \phi)$  is defined in Eq.(A2). We have assumed that the beam response is measured in the co- and cross-polar basis defined on the sphere,  $\sigma_{\text{co}}$  and  $\sigma_{\text{cross}}$ , according to Ludwig's 3rd definition [24],

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{co}} &= \sin \phi \sigma_\theta + \cos \phi \sigma_\phi \\ \sigma_{\text{cross}} &= \cos \phi \sigma_\theta - \sin \phi \sigma_\phi \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

where  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_\phi$  are the usual spherical polar basis. Such co- and cross- polarization basis, Eq.(B10), is obtained by parallel-transporting the local cartesian basis defined at the north pole,  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$ , along great circles through the poles of the sphere (see *e.g.* [9] for a discussion).

Replacing Eq.(B9) into Eq.(B8), one sees that the first term in Eq.(B8) is non-vanishing only for negative  $m$ -modes while the second term is non-zero for positive  $m$ -modes alone. What is more, the parity properties of the  $G$  and  $C$  modes,

$$\begin{aligned} b_{\ell m}^C &= i b_{\ell m}^G, \quad b_{\ell -m}^C = -i b_{\ell -m}^G \\ b_{\ell -m}^P &= b_{\ell m}^P, \quad P = G, C \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

imply that the harmonic transform of linear polarization can be fully determined from one of the two components alone, say  $G$ . Moreover, both negative and positive modes have the same harmonic transform. Thus we shall assume  $m > 0$  below with no loss of generality. In this case the harmonic transform of the  $G$ -mode is simply given by,

$$b_{\ell m}^G = \frac{M_{\ell m}}{2\sqrt{2}} \int d\Omega B(\theta, \phi) {}_{-2}P_\ell^m(\cos \theta) e^{-i(m-2)\phi} \quad (\text{B12})$$

In the flat-sky limit ( $\theta \ll 1$  rad,  $\ell \gg 1$ ) <sup>§§</sup>,

<sup>§§</sup>This corrects the expression for the small-angle limit in [35]: the pre-factor  $\ell^{m+2}$  in Eq (B13) corrects the pre-factor  $\ell^{6-m}$  in Eq (4.32) of [35].

$${}_{-2}P_\ell^m(\cos \theta) \approx \frac{1}{2} (-1)^m \ell^{m+2} J_{m-2}(\ell \theta) \quad (\text{B13})$$

and thus,

$$b_{\ell m}^G = (-1)^m \frac{\ell^{m+2} M_{\ell m}}{4\sqrt{2}} \int d\Omega B(\theta, \phi) J_{m-2}(\ell \theta) e^{-i(m-2)\phi} \quad (\text{B14})$$

Introducing the ellipticity expansion Eq.(A2), one can solve the integral to any perturbative order,

$$b_{\ell m}^{G(n)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} M_{\ell m} \bar{I}_{\ell m}^{(n)} \bar{K}_m^{(n)} \quad (\text{B15})$$

with,

$$\bar{I}_{\ell m}^{(n)} = \frac{\ell^{m+2}}{2} (2\sigma^2)^{-n} \int_0^\pi d\theta \theta^{2n+1} J_{m-2}(\ell \theta) B(\theta) \quad (\text{B16})$$

$$\bar{K}_m^{(n)} = \int_0^{2\pi} d\phi \cos^{2n} \phi e^{-i(m-2)\phi}. \quad (\text{B17})$$

Noting that the above integrals are basically the same than those for the total intensity beam Eqs(A12) & (A13), but replacing  $m$  by  $m-2$  everywhere, they can be integrated in the same way,

$$\bar{I}_{\ell m}^{(n)} = \sigma^m \frac{(n-m/2+1)!}{2^{m/2}} e^{-z} L_{n-m/2+1}^{(m-2)}(z) \quad (\text{B18})$$

with  $z = \ell^2 \sigma^2 / 2$  and,

$$\bar{K}_m^{(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{2n!}{(n+m/2-1)!(n-m/2+1)!} \quad (\text{B19})$$

for even modes  $m \geq 2$ , and  $\bar{K}_m^{(n)} = 0$  for  $m$  odd. Therefore the  $n$ -th order term Eq.(B15) in the beam expansion is given by,

$$b_{\ell m}^{G(n)} = \frac{2\pi}{2^{2n+m/2}} M_{\ell m} \frac{2n!}{(n+m/2-1)!} \sigma^m e^{-z} L_{n-m/2+1}^{(m-2)}(z) \quad (\text{B20})$$

which introduced in Eq.(B15) finally gives,

$$b_{\ell m}^G = \sigma^{m-2} N_{\ell m}^G e^{-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu, m-2} L_{\nu}^{(m-2)}(z) \chi^{\nu+m/2-1} \quad (\text{B21})$$

where we define  $N_{\ell m}^G = -\ell^{2m} M_{\ell m} / (4\sqrt{2}\bar{B}_0)$ , and the coefficients  $\gamma_{\nu, m-2}$  are the same than those defined for the total intensity Eq.(A17), except for the subindex which is  $m-2$  here instead of  $m$  there.

For most of actual experimental beams the ellipticity is rather small,  $\chi \ll 1$ . As discussed in Appendix A, a *second order* analysis of the beam ellipticity is already very accurate to very large multipoles as comparison with

numerical integration shows (see §IV C, Table IV C for specific prescriptions depending on experimental parameters). Thus, expanding the beam harmonic transform to *second order* in  $\chi$  one gets non-vanishing contributions only from the modes  $m = 2, 4$  and  $6$ ,

$$\begin{aligned} b_{\ell 2}^G &= -\frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} e^{-\ell^2 \sigma^2/2} \left[ 1 - \frac{\chi}{4} \ell^2 \sigma^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi^2}{4} \left( -\ell^2 \sigma^2 + \frac{3}{16} \ell^4 \sigma^4 \right) \right] \\ b_{\ell 4}^G &= -\frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} \frac{\chi}{8} \ell^2 \sigma^2 e^{-\ell^2 \sigma^2/2} \left[ 1 + \chi \left( 1 - \frac{1}{4} \ell^2 \sigma^2 \right) \right] \\ b_{\ell 6}^G &= -\frac{N_{\ell 0}}{2\sqrt{2}} \frac{\chi^2}{128} \ell^4 \sigma^4 e^{-\ell^2 \sigma^2/2} \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

where  $N_{\ell 0} = \sqrt{2\ell + 1/4\pi}$ , and negative modes (*i.e.*  $m = -2, -4, -6$ ) have to be included as they have the same harmonic transform than positive modes, *i.e.*  $b_{\ell -m}^G = b_{\ell m}^G$ . Analogous expressions for the harmonic transform to *first order* in the ellipticity are given in §V, Eqs.(25) & (26). Note that for a circular Gaussian window,  $\chi = 0$ , one gets,  $b_{\ell \pm 2}^G = -(N_{\ell 0}/2\sqrt{2}) \exp[-\ell^2 \sigma^2/2]$  and  $b_{\ell m}^G = 0$  for  $|m| > 2$ . Note that, as argued above (see paragraph under Eq.(B17)), the linearly polarized beam transform, Eq.(B22), can be straightforwardly obtained from the total intensity beam transform, Eq.(A20), by replacing in the latter  $m$  by  $m - 2$ , and including a multiplicative normalizing factor of  $-1/(2\sqrt{2})$  appropriate for linear polarization modes, see Eq.(B1).

- 
- [1] M. Abramovitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions, (National Bureau of Standards, Washington D.C.), 1964
  - [2] M.M. Basko, A.G. Polnarev, Sov. Astron., 24, 268, 1980
  - [3] A. Benoit *et al.*, astro-ph/0106152, 2001.  
Web-site: <http://www.archeops.org>
  - [4] J. R. Bond, G. Efstathiou, ApJ, 285, L45, 1984
  - [5] J. R. Bond, G. Efstathiou, MNRAS, 226, 655, 1987
  - [6] Boomerang experiment Web-page:  
<http://www.physics.ucsb.edu/~boomerang>
  - [7] D. M. Brink, G. R. Satchler, Angular Momentum, (Oxford Univ. Press: Oxford), 1962
  - [8] C. Burigana, D. Maino, N. Mandolesi, E. Pierpaoli, M. Bersanelli, L. Danese, M. R. Attolini, A&AS, 130, 551, 1998
  - [9] A. Challinor, P. Fosalba, D. Mortlock, M. Ashdown, B. Wandelt, K. Górski, Phys. Rev. D, 62, 123002, 2000
  - [10] L.-Y. Chiang, *et al.*, 2001, astro-ph/0110139
  - [11] A. de Oliveira-Costa, M. Tegmark (eds), "Microwave Foregrounds", ASP, V181, 1999
  - [12] P. Fosalba *et al.*, in preparation, 2001
  - [13] J. N. Goldberg, *et al.*, J. Math. Phys. 8, 2155, 1967
  - [14] I.S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, (Academic Press, New York), 1965
  - [15] S. Hanany *et al.*, ApJ, 545, L5, 2000
  - [16] E. Hivon *et al.*, astro-ph/0105302, submitted to ApJ, 2001
  - [17] W. Hu, M. White, Phys. Rev. D, 56, 596, 1997
  - [18] N. Kaiser, MNRAS, 202, 1169, 1983
  - [19] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, A. Stebbins, Phys. Rev. Lett., 78, 2058, 1997
  - [20] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, A. Stebbins, Phys. Rev. D, 55, 7638, 1997
  - [21] L. Knox, Phys. Rev. D 52, 4307-4318, 1995
  - [22] N.N. Lebedev, Special Functions & Their Applications, (Dover Publications Inc.: New York), 1972
  - [23] A.T. Lee, *et al.*, astro-ph/0104459, 2001
  - [24] A.C. Ludwig, IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-21, 116, 1973
  - [25] N. Mandolesi, *et al.*, A&AS, 145, 323, 2000
  - [26] MAXIMA-1 experiment Web-page:  
<http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html>
  - [27] C.B. Netterfield *et al.*, astro-ph/0104460, submitted to ApJ, 2001
  - [28] K. Ng & G. Liu, Int. J. Mod. Phys. D, 8, 61, 1999
  - [29] Planck satellite Web-page:  
<http://astro.estec.esa.nl/Planck>
  - [30] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes, (Cambridge University Press, Cambridge), 1992
  - [31] S. Prunet, private communication
  - [32] M.J. Rees, ApJ, 153, L1, 1968
  - [33] U. Seljak, ApJ, 482, 6, 1997
  - [34] T. Souradeep & B. Ratra, astro-ph/0105270, 2001
  - [35] A. Stebbins, astro-ph/9609149, 1996
  - [36] J. Tauber, "The Extragalactic Infrared Background and its Cosmological Implications, International Astronomical Union. Symposium no. 204. Manchester, England, August 2000.
  - [37] M. Tegmark *et al.*, ApJ, 530, 133, 2000
  - [38] M. Tegmark & A. de Oliveira-Costa, submitted to Phys. Rev. D, astro-ph/0012120, 2000
  - [39] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii, Quantum Theory of Angular Momentum, (World Scientific, Singapore), 1988
  - [40] B. Wandelt, K. Górski, Phys. Rev. D 63, 123002, 2000
  - [41] J.-H.P. Wu *et al.*, ApJS, 132, 1, 2001
  - [42] M. Zaldarriaga, ApJ, 503, 1, 1998
  - [43] M. Zaldarriaga, astro-ph/0106174, 2001
  - [44] M. Zaldarriaga, U. Seljak, Phys. Rev. D, 55, 1830, 1997





## .4    Non-Gaussianité et Courbure

O.Doré, S. Colombi, F.R. Bouchet

*Probing non-Gaussianity through curvature*

submitted to Monthly Notices of Royal Astronomical Society (2001)



# Probing CMB Non-Gaussianity Using Local Curvature

Olivier Doré, Stéphane Colombi and François R. Bouchet

Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, FRANCE  
 dore@iap.fr, colombi@iap.fr, bouchet@iap.fr

10 November 2001

## ABSTRACT

It is possible to classify pixels of a smoothed cosmic microwave background (CMB) fluctuation map according to their local curvature in “hill”, “lake” and “saddle” regions. In the Gaussian case, fractional areas occupied by pixels of each kind can be computed analytically for families of excursion sets as functions of threshold and moments of the fluctuation power spectrum. We show how the shape of these functions can be used to constrain accurately the level of non-Gaussianity in the data by applying these new statistics to an hypothetical mixed model suggested by Bouchet *et al.* (2001). According to our simple test, with only one  $12.5 \times 12.5$  deg<sup>2</sup> map, Planck should be able to detect with a high significance a non-Gaussian level as weak as 15% to the temperature map (5% to the  $C_\ell$ ), whereas a marginal detection would be possible for MAP with a non-Gaussian level around 30% (15% to the  $C_\ell$ ).

## 1 INTRODUCTION

From the now well measured temperature fluctuations in the cosmological microwave background (CMB) we can gain some unvaluable constraints on the physics of the early universe. An important issue lies in determining whether these fluctuations are of Gaussian nature or not. Indeed, most of inflation scenarii predict a very low level of non-Gaussianity while models involving topological defects can give rise to significantly non Gaussian fluctuations. Even if a high degree of non-Gaussianity seems disfavored by recent measurements (Netterfield *et al.* 2001; Lee *et al.* 2001; Halverson *et al.* 2001; Santos *et al.* 2001), the presence of topological defects is not yet ruled out by observations, as advocated recently by e.g. Bouchet *et al.* (2000), who proposed a mixed model where Cosmic Microwave Background (CMB) temperature fluctuations are seeded in part by cosmic strings.

There are numerous ways of probing non Gaussian features of a random field such as a CMB temperature fluctuations map. Since statistical properties of random Gaussian fields are entirely determined by their two-point correlation function, a natural approach consists in measuring higher order correlation functions or related statistics such as cumulants of the distribution. The measurements can be done in real and Fourier space (Hinshaw *et al.* 1995; Ferreira *et al.* 1998; Magueijo 2000; Banday *et al.* 2000; Verde & Heavens 2001; Komatsu *et al.* 2001; Santos *et al.* 2001) or in the space of wavelet coefficients (Aghanim & Forni 1999; Aghanim & Forni 2001).

Alternatively, non Gaussian features of CMB maps can be probed by the topological analysis their excursions sets, defined for a random field  $T(\theta)$  as  $A_u(T) = \{\theta \mid T(\theta) \geq u\}$ . For example, for a sufficiently smooth and non degenerate random field it is possible to measure the Euler characteristic (or genus) of the excursion sets via a counting of critical

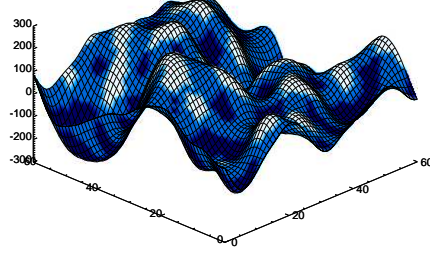
points<sup>\*</sup>, classified according to their curvature, *i.e.* maxima, minima or saddle points in our 2D case (e.g. Adler 1981, p. 87). Critical points counting is a well known practical issue in the context of CMB analysis and specific predictions can be derived for smooth random Gaussian fields (e.g., Adler 1981), which allow one to constrain the degree of non Gaussianity of CMB maps by measuring e.g. the Euler characteristic (Coles *et al.* 1989; Gott *et al.* 1990; Luo 1994; Smoot *et al.* 1994) or peak statistics (Bond and Efstathiou 1987; Coles *et al.* 1989; Heavens & Sheth 1999; Heavens & Gupta 2001).

Following an approach advocated recently in the large scale structure context (3D) by Colombi, Pogosyan & Souradeep (2000), we propose in this paper to extend the counting to ordinary points, *i.e.* to classify *all* the points according to their local curvature as belonging to “hills”, “lakes” or “saddles” (see Fig. 1 for an example). By measuring the relative abundances,  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$ ,  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  and  $\mathcal{P}_{\text{saddle}}$ , of these three types of points for various excursions sets and smoothing scales, *i.e.* by exploring the correlation between height and curvature<sup>†</sup>, we are able to extract a mathematically well defined Gaussian signature, depending formally on only one specific ratio of spectral parameters. As a result, a comparison of the measured abundances with those predicted in the Gaussian case allows us to detect a certain level of non-Gaussianity.

This paper is organized as follows. In section § 2, after recalling some useful results about 2D Gaussian random fields, we derive analytic predictions for the abundances, following and extending the work of Bond & Efstathiou (1987). In section § 3 we discuss technical issues involved in the prac-

<sup>\*</sup> The points where the gradient of the field cancels.

<sup>†</sup> In this sense, our work is similar in spirit as in Takada (2001).

2 *O. Doré, S. Colombi & F.R. Bouchet*

**Figure 1.** Example of location of “lake”, “hill” and “saddle” points in a Gaussian random field smoothed with a Gaussian window of size 5 pixels. Those latter are represented as a grid pattern projected on the surface. The points are colored according to their type: “hill” points are in light blue, “lake” points in red and “saddle” points in dark blue. Red lakes are connected to light blue hills by dark blue saddles. “Lake” and “hill” points are of comparable abundance while “Saddle” points are the most common. The evolution of the relative abundances with thresholding can be well visualized from this plot: for example, when the threshold gets higher, the relative abundance of lake points decreases, on the contrary which of hill points increases, as expected. In this paper we shall rely on details of these variations to discriminate between a Gaussian and a non Gaussian random field.

tical measurements of  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$ ,  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  and  $\mathcal{P}_{\text{saddle}}$ . In section § 4 we build a  $\chi^2$  statistic that allows us to combine a set of measurements in order to quantify the likelihood of an image to be Gaussian. We then apply the method to the case of noisy mixed models involving cosmic strings plus cold dark matter. Finally, results are discussed in section § 5.

## 2 THEORETICAL CONSIDERATIONS

In this section we recall some specific properties of 2D Gaussian random fields, following Bond & Efstathiou (1987) (BE87) (a 2D transcription of the 3D formalism of Bardeen *et al.* 1986). We extend the calculations of this work to obtain theoretical expressions for the abundances of interest, i.e. the fractions of space occupied respectively by hill, lake and saddle regions.

### 2.1 Facts about a Gaussian random field

Let us first consider a temperature fluctuation field,  $\delta_T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r})/T - 1$  whose 2D Fourier transform is  $\delta_T(\mathbf{k}) \equiv \int d^2\mathbf{k} \delta_T(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  and whose power spectrum  $P(k)$  is

$$\langle \delta_T(\mathbf{k}) \delta_T(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^2 P(k) \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1)$$

where  $\delta_D(\mathbf{k})$  is the Dirac distribution. We can define the moments of the power spectrum

$$\sigma_j^2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} P(k) k^{2j} \quad (2)$$

and the ratio

$$\gamma \equiv \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0 \sigma_2}. \quad (3)$$

Note that  $\sigma_0$  is the rms of the fluctuation field  $\delta_T$ . Naturally, in the flat sky approximation, i.e. large multipole  $l$  and small separation angles, the Fourier (flat) power spectrum is related to spherical harmonic power spectrum as follows

$$P(k) \simeq C_\ell \quad \text{and} \quad k \simeq \ell. \quad (4)$$

Let us consider from now on only the normalized fluctuation field

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta_T(\mathbf{x})}{\sigma_0}. \quad (5)$$

At a given point  $\mathbf{r}$ , we note the gradient of the field  $\nabla \delta \equiv \eta$  and the Hessian matrix  $\zeta_{ij}$ . This symmetric real matrix can be diagonalised by applying a rotation of an angle  $\theta$  and we note  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  the *opposite* of its eigenvalues, with  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . The normalized trace of the curvature matrix writes,

$$x \equiv \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sigma_2}, \quad (6)$$

and the ellipticity  $e$  is defined as

$$e \equiv \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\sigma_2 x}. \quad (7)$$

Note that with this notation,  $x$  and  $e$  should have the same sign. If  $\lambda_2 \geq 0$  then  $x \geq 0$  and  $0 \leq e \leq 1/2$ , if  $\lambda_1 \leq 0$  then  $x \leq 0$  and  $-1/2 \leq e \leq 0$ . If  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  have opposite signs, then neither  $x$  nor  $e$  are restricted.

For a Gaussian random field, the joint probability distribution function of  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $x$ ,  $e$  and  $\theta$  is given by [Eq. (A1.6) in BE87]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\delta, \eta, x, e, \theta) d\delta dx de d\theta d^2\eta = \\ e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu^2(x-\gamma\delta)^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \times \\ e^{-\eta^2/\sigma_1^2} \frac{d^2\eta}{\pi\sigma_1^2} e^{-4x^2e^2} 8x^2 e de \frac{d\theta}{\pi}, \end{aligned} \quad (8)$$

where we set

$$\mu \equiv (1 - \gamma^2)^{-1/2}. \quad (9)$$

Knowing this probability distribution function, it is easy to show that  $\langle \delta^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \langle \eta^2 \rangle = 1$ , that  $\eta$  is correlated with neither  $\delta$  nor  $x$  nor  $e$ , but, on the opposite, that  $\langle \delta x \rangle = \gamma$ , i.e. the height of a point is correlated with the curvature at this point. This latest result is of particular interest to us since the so-induced non-trivial dependence on thresholding will generate a specific gaussian signature that we will exploit in the following.

### 2.2 Studying the local curvature

BE87 calculated the density probability of extrema for a Gaussian random field as a function of threshold. So using the properties of *first derivatives*, they open the way to further works (Heavens & Sheth 1999; Heavens & Gupta 2001) that illustrate the use of the number and spatial distribution of extrema to characterize Gaussian random fields.

We aim at extending this work to *second derivatives* by

## Probing CMB Non-Gaussianity Using Local Curvature 3

characterizing the local curvature *at any point* and then by comparing the abundance of 3 defined types.

The local curvature is defined by the Hessian. By considering the sign of its eigenvalues ( $-\lambda_1$  and  $-\lambda_2$ ) we are lead to distinguish three families of points :

- the “hill” points for which both eigenvalues are negative, *i.e.*  $x \geq 0$  and  $0 \leq e \leq 1/2$ ;
- the “lake” points for which both eigenvalues are positive, *i.e.*  $x \leq 0$  and  $-1/2 \leq e \leq 0$ ;
- the “saddle” points for which the eigenvalues are of different signs.

The first, second and third family incorporate respectively maxima, minima and saddle points.

Extending the calculation of BE87 we now compute the probability that a point  $(\delta, \eta, x, e, \theta)$  above a given threshold  $\delta_{\text{th}}$ , *i.e.* such that  $\delta \geq \delta_{\text{th}}$ , belongs to any of these three classes. More precisely we calculate the quantities  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}) \equiv \mathcal{P}(0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2 | \delta_{\text{th}} \leq \delta)$ ,  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}}) \equiv \mathcal{P}(0 \geq x, 0 \geq e \geq -1/2 | \delta_{\text{th}} \leq \delta)$  and  $\mathcal{P}_{\text{saddle}}(\delta_{\text{th}}) = 1 - \mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}) - \mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$ .

To compute the quantity  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  we first estimate the probability  $\mathcal{P}(0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2, \delta_{\text{th}} \leq \delta)$ . Starting from the distribution, Eq. (8), for the cases of interest to us, we can perform straightforwardly both the integration  $\int_{-\infty}^{\infty} d^2\eta / (\pi\sigma_\eta^2)$  and  $\int_0^\pi d\theta / \pi$ . Doing so yields a probability function  $\mathcal{P}(\delta, x, e)$ . Note that the fact that  $\theta \in [0, \pi]$  is due to the chosen ordering of the eigenvalues ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) implicit in the distribution Eq. (8). The subsequent integration  $\int_0^{1/2} de$  yields the differential density

$$\mathcal{N}_{\text{hill}}(\delta, x, 0 \leq e \leq 1/2) d\delta dx = e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\mu^2(x-\gamma\delta)^2/2} (1 - e^{-x^2}) \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}. \quad (10)$$

Then we can still perform analytically the integration over  $x \geq 0$  and we get

$$\mathcal{N}_{\text{hill}}(\delta, 0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2) d\delta = e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\mu} \left( 1 + \text{Erf} \left( \frac{\gamma\mu\delta}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{e^{-\mu^2\gamma^2\delta^2/(2+\mu^2)}}{\sqrt{2+\mu^2}} \left( 1 + \text{Erf} \left( \frac{\gamma\mu^2\delta}{\sqrt{2}\sqrt{2+\mu^2}} \right) \right) \right]. \quad (11)$$

The integration over some threshold  $\delta_{\text{th}}$  cannot be performed analytically. However, knowing that

$$\mathcal{P}(\delta_{\text{th}} \leq \delta) = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left( \frac{\delta_{\text{th}}}{\sqrt{2}} \right) \quad (12)$$

it is easy to evaluate numerically the quantity

$$\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}) = \frac{\int_{\delta_{\text{th}}}^{\infty} \mathcal{N}_{\text{hill}}(\delta, 0 \leq x, 0 \leq e \leq 1/2) d\delta}{\mathcal{P}(\delta_{\text{th}} \leq \delta)}. \quad (13)$$

We can still obtain analytically the limiting value  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = -\infty)$ , *i.e.* the fraction of “hill” points in the absence of threshold. We find

$$\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = -\infty) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \simeq 0.2113. \quad (14)$$

An analogous calculation can be performed for “lake”

points. It leads to the differential density

$$\mathcal{N}_{\text{lake}}(\delta, x \leq 0, -1/2 \leq e \leq 0) d\delta = e^{-\delta^2/2} \frac{\mu d\delta}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\mu} \text{Erfc} \left( \frac{\gamma\mu\delta}{\sqrt{2}} \right) - \frac{e^{-\mu^2\gamma^2\delta^2/(2+\mu^2)}}{\sqrt{2+\mu^2}} \text{Erfc} \left( \frac{\gamma\mu^2\delta}{\sqrt{2}\sqrt{2+\mu^2}} \right) \right] \quad (15)$$

from which we can deduce numerically  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  as in Eq. (13). The asymptotic value  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}} = -\infty)$  can also be obtained analytically, and from parity argument one finds

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}} = -\infty) &= \mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = -\infty) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \simeq 0.2113. \end{aligned} \quad (16)$$

Two remarkable properties of Gaussian random fields emerge from the above analytical calculations:

- the evolution of the “hill”, “lake” and “saddle” point fractions as functions of threshold  $\delta_{\text{th}}$  depends only on the spectral parameter  $\gamma$ ;
- the asymptotic value for  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$  is *independent* of any spectral parameter, *i.e.* is the same for any *Gaussian random field*. This would not be true if we were considering only maxima, minima or saddle points (see BE87).

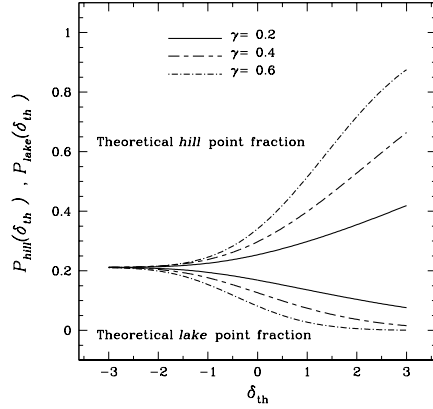
To illustrate these results, we draw on Fig. 2 the functions  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  for a set of  $\gamma$  values. Except in the limit  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$ , the evolution of these functions with  $\delta_{\text{th}}$  is rather sensitive to  $\gamma$ .

At this point, it is important to be aware that till now, we have supposed an idealistic, infinite resolution experiment, *i.e.* we did not take into account any *beam smearing* effect that would affect any genuine measurement. Consequently, in order to compare the predictions to any true measurements, it would be necessary to incorporate this effect in our calculations. To do so, we should consider the convolved field,  $\delta * B$ , where  $B$  stands for the instrumental beam response, instead of the idealistic fluctuation field,  $\delta$ . Since linear transformations such as the convolution by an arbitrary beam function do not change the Gaussian nature of a random field, the beam smearing should appear only as a dependence of  $\gamma$  on the smoothing scale  $\sigma_B$ . Furthermore, although the problem of beam convolution in its full generality is very intricate, it turns out to be analytically tractable for a Gaussian, symmetric beam (BE87), a reasonable approximation in practice. Fig. 6 of BE87 illustrates clearly this effect.

### 3 CONFRONTING PREDICTIONS AND MEASUREMENTS ON SIMULATIONS

In order to test the previous theoretical calculations and to prove our ability to measure functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$ ,<sup>‡</sup> we performed several measurements on simulated maps. We henceforth limit ourselves to small simulated square patches of the sky of width  $\sim 12.5$  deg. These patches

<sup>‡</sup> Again, we restrict here our analysis to these two functions, since function  $\mathcal{P}_{\text{saddle}}(\delta_{\text{th}})$ , which is equal (by construction) to  $1 - \mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}) - \mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$ , does not bring any further information.

4 *O. Doré, S. Colombi & F.R. Bouchet*

**Figure 2.** Functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  in the Gaussian case for various values of  $\gamma$  as indicated on the figure. Their value is independent of  $\gamma$  in the limit  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$ , but their evolution with  $\delta_{\text{th}}$  is rather sensitive to  $\gamma$ . Similar conclusions hold for function  $\mathcal{P}_{\text{saddle}}(\delta_{\text{th}}) = 1 - \mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}) - \mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$ , which is not plotted for simplicity.

are considered as being flat and pixelized with a  $512 \times 512$  Cartesian mesh of resolution  $\theta_{\text{pix}} = 1.5'$ .

This section is organized as follows: we first describe the measurement principles (§ 3.1) and apply them to noise free realization of Cold Dark Matter (CDM) Gaussian maps (§ 3.2); in particular, we examine the Gaussianity of the distribution function of measurements in order to be able to perform later  $\chi^2$  tests; finally we discuss practical issues related to finite resolution and finite volume effects (§ 3.3).

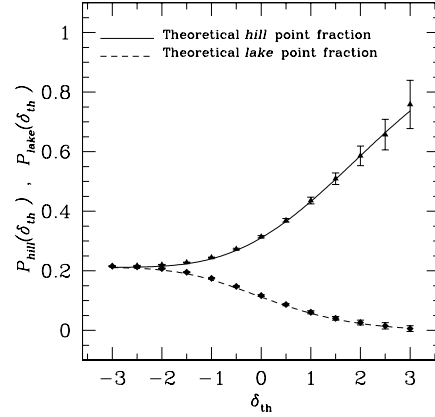
### 3.1 Principles of measurements

The measurements consist in determining the fractions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  for an ensemble of excursion sets (subsets for which  $\delta \geq \delta_{\text{th}}$ ) of an image smoothed at different scales  $\sigma_B$ . To insure sufficient differentiability, i.e. at least continuity of second order derivatives, we choose a Gaussian smoothing window.

Similarly as in Colombi et al. (2000) for the 3D case, to measure the local curvature at a given point, we find the quadratic form which fits this point and its 8 closest neighbors. We deduce from the quadratic form coefficients the local values of the second derivatives, i.e. the Hessian matrix, then diagonalize this matrix and determine the sign of its eigenvalues  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ . Both easy to implement and fast, this method turns out to be quite robust in the presence of noise.

### 3.2 Example: application to noise free realizations

As a first example, we apply this measurement technique to 200 simulated noise free realizations of CDM like tempera-

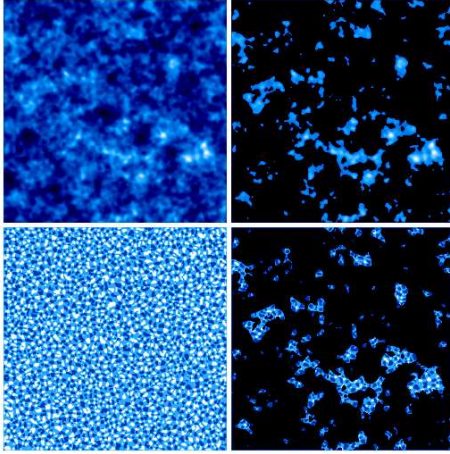


**Figure 3.** Measurement of functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  on Gaussian simulated maps in the standard CDM case. The triangles and the losanges give respectively the hill and lake point fractions obtained from an average over 200 realizations of size  $12.5 \times 12.5 \text{ deg}^2$ . The error bars on each symbol are obtained from the dispersion over the 200 realizations. Prior to measurement, a smoothing with a Gaussian window of size  $\sigma_B = 3\theta_{\text{pix}}$  was performed. The continuous and dashed curves correspond to the theoretical expectations for a Gaussian random field with  $\gamma_{\text{eff}} = 0.46$ .

ture maps smoothed by a Gaussian beam of  $\sigma_B = 5'$ . In each realization, we measure both  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  for the ensemble of excursion sets defined by  $\delta_{\text{th}} = -3.0, -2.5, -2.0, \dots, 3.0$ , as illustrated by Fig. 3. For comparison purpose, we plotted on this figure the theoretical curves corresponding to an *ad hoc* choice of the parameter  $\gamma_{\text{eff}}$ ,  $\gamma_{\text{eff}} = 0.46$ . With this choice of  $\gamma_{\text{eff}}$ , the theoretical curves fit very well the data. Note that the value of  $\gamma_{\text{eff}}$  we find is slightly different from the one that would be inferred from Eqs. (2) and (3) while taking into account the effects of smoothing in the integrals,  $\gamma = 0.35$ . This point will be discussed further in § 3.3. The dispersion over the measurements is very tight except at high threshold where we enter a rare events regime, as indicated by the larger  $1\sigma$  error bars.

To illustrate more visually the protocol, Fig. 4 displays one CDM realization smoothed at  $\sigma_B = 3\theta_{\text{pix}}$ , the corresponding excursion set for  $\delta \geq 1$  as well as the local curvature map, where *hill*, *lake* and *saddle* points are identified by respectively black, white and grey points. A careful cross examination of these images provides some insight on the processes at stake, i.e. the correlation of extrema and local curvature.

To further investigate the dispersion over the measured values of  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  at a given  $\delta_{\text{th}}$ , we drawn on Fig. 5 the probability distribution function of the hill point fraction measured from the 200 realizations [similar results can be obtained for  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$ ]. Two thresholds are considered,  $\delta_{\text{th}} = -2$  (left pannel) and  $\delta_{\text{th}} = 0$  (right pannel). The solid line on each pannel corresponds to the Gaussian limit. It

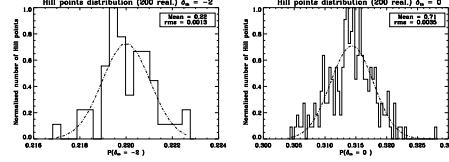


**Figure 4.** Illustration of the measurement protocol. Considering a CDM temperature map with  $512 \times 512$  pixels, of width  $12.5 \text{ deg} \times 12.5 \text{ deg}$  and smoothed with a Gaussian window of size 3 pixels (top left panel), we identify “hill”, “lake” and “saddle” points according to their local curvature (respectively by dark grey, white and light grey points on the bottom left panel). The fraction of space occupied by each kind of point is studied as function of density threshold. As an example, the excursion set corresponding to  $\delta_{\text{th}} = 1$  is shown in right panels, which are the same than left panels except that only regions with  $\delta \geq \delta_{\text{th}}$  are shown, the rest being coded in black. As one can see, the relative abundance of “lake” points in bottom right panel is now smaller than on bottom left panel, while which of “hill” points has augmented, as expected. The measurement of the relative fraction of the three kind of points as a function of density threshold is the key idea of this paper.

fits qualitatively well the measurements, so the previously drawn  $1\sigma$  errors are meaningful estimates of the cosmic errors.<sup>§</sup> We checked if the distribution function of the measurements is Gaussian for other values of  $\delta_{\text{th}}$  and found that it is indeed the case except at high threshold,  $\delta_{\text{th}} \geq 2.5$ , where one enters the rare events regime.

Thus, as long as  $\gamma$  can be seen as an adjustable parameter, the measurements in this *idealistic* noise free case are in very good agreement with theoretical expectations. Furthermore, the cosmic errors associated with these measurements are very tight for a Gaussian field. This last point will be of particular interest to us since it makes the evolution of functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  with  $\delta_{\text{th}}$  a sharp signature of random Gaussian fields.

<sup>§</sup> however, one must keep in mind that error bars for different values of  $\delta_{\text{th}}$  are correlated with each other, but this will be taken into account in the analyses conducted later.



**Figure 5.** Distribution function of hill points fraction obtained from 200 CDM noise free realizations of temperature maps smoothed with a gaussian window of size  $\sigma_B = 3\theta_{\text{pix}}$ , similarly as in Fig. 4. Two excursion sets are considered, one with  $\delta_{\text{th}} = -2$  (left panel) and the other one with  $\delta_{\text{th}} = 0$  (right panel). The smooth dotted-dashed curve on each panel corresponds to a Gaussian of same variance as the distribution function. It superposes well to the measurements (histograms) for the excursion sets considered here.

### 3.3 The concept of effective $\gamma$ : spurious effects and available dynamic range

In the above discussion, we used a best fit value of  $\gamma$  to check if the measured “hill”, “saddle” and “lake” point fractions agreed with theoretical predictions for a Gaussian random field. Therefore, the only thing we proved so far is that for a finite realization of a Gaussian random field, there exists a value  $\gamma_{\text{eff}}$  which is such that measurements agree very well with analytic predictions. This fact by itself is highly significant and is the key point of our paper: for a map in which temperature fluctuations are partly seeded by cosmic strings, we shall see that it is actually not possible to find a value of  $\gamma_{\text{eff}}$  leading to point fractions matching the measurements in all the available dynamic range – namely, for all possible values of  $\delta_{\text{th}}$  and  $\sigma_B$ . As we shall see later, it is thus not needed to accurately determine the real value of  $\gamma$  to efficiently constrain the level of non Gaussianity of a map.

However, studying the difference between  $\gamma$  and  $\gamma_{\text{eff}}$  can help to determine the available dynamic range, i.e. the set of values of  $\delta_{\text{th}}$  and  $\sigma_B$  in which one can trust the measurements. We already noticed in previous section that the density threshold should be small enough,  $\delta_{\text{th}} \lesssim 2.5$ , to avoid entering the rare event regime, where the cosmic distribution function of measurements becomes non Gaussian. Here, we are concerned by two effects that we ignored previously:

- pixelization effects, or equivalently, effects of finite resolution: as discussed above, it is important to smooth the data to insure sufficient differentiability. The smoothing scale should be large enough compared to the pixel size to avoid anisotropies or discreteness effects brought by the pixelization.
- Finite volume and edge effects: our experimental maps cover a rather small fraction of the sky, due to the limited dynamical range in the cosmic-string simulations from (Bouchet *et al.* 1988; Bennett & Bouchet 1990). Therefore, to avoid reducing too much the number of statistically independent regions of the map, the smoothing scale should not be too large. In a more realistic experiment covering a large fraction of the sky, finite volume and edge effects should not be as much of a concern: indeed, from causality arguments, non Gaussian features are usually not expected at large angular scales ( $\theta \geq 10 \text{ deg.}$ ) and therefore such scales



6 *O. Doré, S. Colombi & F.R. Bouchet*

should not bring any significant constraint on the global level of non Gaussianity in the data.

To test effects of finite coverage and finite resolution, we examine now the scale-free case, where the power-spectrum of temperature fluctuations is given by  $P(k) \propto k^n$ . Assuming that the field has been smoothed by a Gaussian of width  $\sigma_B$ , equation (2) becomes

$$\sigma_j^2(\sigma_B) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{-k^2 \sigma_B^2} P(k) k^{2j}, \quad (17)$$

The advantage of considering scale-free fluctuations is that the theoretical value of  $\gamma$  does not depend on scale and is equal to

$$\gamma = \frac{\Gamma[2 + n/2]}{\sqrt{\Gamma[3 + n/2]\Gamma[1 + n/2]}}. \quad (18)$$

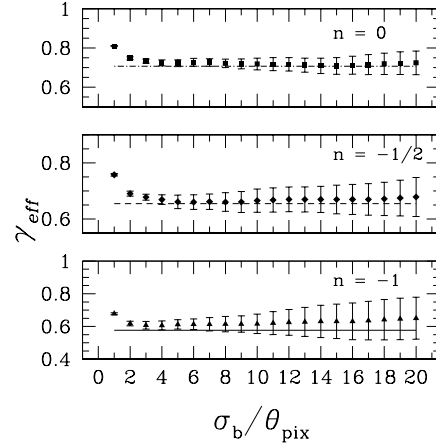
Convergence is reached for  $n \geq -2$ . Here we examine the following values of spectral index,  $n = 0, -1/2, -1$ , corresponding respectively to  $\gamma_{\text{eff}} = 0.71, 0.65, 0.58$ . In Fig. 6, the measured value of  $\gamma_{\text{eff}}$  is displayed in each case as a function of smoothing scale. It is obtained by fitting  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1)$  as explained more in detail later. An average over 50 realizations of  $512 \times 512$  pixels maps is performed. The errorbars on the figure represent the corresponding scatter, which augments with  $\sigma_B$  as expected, due to finite volume effects. Agreement between  $\gamma_{\text{eff}}$  and the analytic prediction is pretty good, except at small scales. One can also notice a slight systematic shift between  $\gamma_{\text{eff}}$  and its theoretical expectation, increasing with  $-n$ , in agreement with results of § 3.2: CDM would correspond approximately to  $n \simeq -1.5$ .

From Fig. 6, we see that pixelisation effects become negligible when  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} \gtrsim 3$ . We checked again that for these scale-free experiments, the distribution function of the measured hill or lake fractions is well approximated by a Gaussian in the trustable dynamic range, i.e.  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} \gtrsim 3$  and  $\delta_{\text{th}} \lesssim 2.5$ . Note that there should be an upper bound as well for  $\sigma_B$  as discussed above, since cosmic errors increase with scale, as well as the small systematic bias between  $\gamma$  and  $\gamma_{\text{eff}}$  (but this latter effect can be considered as negligible compared to the size of the errorbars). Our  $\chi^2$  analysis below will anyway naturally take into account that by giving a lesser weight to scales with larger errors.

#### 4 TESTING NON-GAUSSIANITY : PRINCIPLE AND APPLICATION TO MIXED MODELS

From the previous section, we conclude that in the case of a smoothed Gaussian random field, functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{void}}(\delta_{\text{th}})$  can be measured accurately and fit very well the analytical predictions provided that  $\gamma$  is considered as an adjustable parameter. Furthermore, their probability distribution function is well approximated by a Gaussian if  $\delta_{\text{th}} \lesssim 2.5$ , which now allows us to define a rigorous measurement protocol based on  $\chi^2$  analysis that we shall apply to simulated data in the trustable scale range determined above, namely  $\sigma_B \geq 3$ .

In this section, we first detail how we use functions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{void}}(\delta_{\text{th}})$  to build a  $\chi^2$  statistic testing Gaussianity (§ 4.1). Then we apply the method to simple simulated mixed models involving cosmic strings plus CDM and



**Figure 6.** Effective  $\gamma$  inferred from the measured value of  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1)$  as a function of smoothing scale (symbols with error bars), compared to analytic predictions (horizontal lines) for a Gaussian random field with a scale-free power spectrum,  $P(k) \propto k^n$ . Three values of the spectral index are considered,  $n = 0, -1/2, -1$ . For each value of  $n$ , the symbols and their error bars correspond respectively to the average and the rms over 50 realizations.

see how it can be used to bound quantitatively the relative contribution of cosmic strings (§ 4.2).

#### 4.1 The method

Let us assume as before that we have at our disposal an observed temperature map  $\delta_T$ , on which we measured the fractions  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_i})$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_i})$  for a set of threshold values  $\{\delta_{\text{th},i}\}$  and smoothing scales  $\{\sigma_{B,i}\}$ . If the power spectrum of this random field is known, we can in principle define analytically a set of values of  $\gamma$  for each smoothing scale,  $\{\gamma_{\sigma_{B,i}}\}$ . Assuming furthermore that the field is Gaussian and that our estimators of  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$  and  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  are unbiased, it is easy to deduce from this  $\gamma$  set some *theoretical expectations* for the set,  $\bar{\mathcal{P}}_X(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_i}) \equiv \langle \mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_i}) \rangle$ , where  $X$  stands from now on for “lake” or “hill”. To quantify the distance between these theoretical predictions and the measurements, we introduce the standard  $\chi^2$  statistic. Since these measurements can obviously not be considered as independent, we have to introduce the full theoretical variance-covariance matrix

$$C_{II'} \equiv ((\mathcal{P}_I - \bar{\mathcal{P}}_I)(\mathcal{P}_{I'} - \bar{\mathcal{P}}_{I'})), \quad (19)$$

where we use the short hand notation  $\mathcal{P}_I = \mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_i})$  and  $\mathcal{P}_{I'} = \mathcal{P}_{X'}(\delta_{\text{th}}, \sigma_{B_{i'}})$ . Then, the statistic

$$\chi^2 \equiv \sum_{II'} (\mathcal{P}_I - \bar{\mathcal{P}}_I) (C_{II'})^{-1} (\mathcal{P}_{I'} - \bar{\mathcal{P}}_{I'}) . \quad (20)$$

is expected to follow a  $\chi^2$ -distribution, as illustrated by a practical example below. Indeed results of § 3.2 suggest

that the distribution function of the measured  $\mathcal{P}_I$  is nearly Gaussian if  $\delta_{\text{th}} \lesssim 2.5$ .

In practice, we have to introduce two more subtleties in this protocol.

First, as discussed extensively in § 3.3, the practical realization of a Gaussian random field yields to a measured function  $\mathcal{P}_I$  matching the theory,  $\tilde{\mathcal{P}}$ , but with an *effective* value of  $\gamma$  different from the underlying one. Taking into account some additional Gaussian noise, as discussed more in detail below, would make this effect even stronger. Rigorously, we should modelize this  $\gamma_{\text{eff}}$  effect in terms of statistical bias on the estimators of function  $\mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}}, \sigma_B)$ , but we proceed here differently, for simplicity: we extract a  $\gamma_{\text{eff}}(\sigma_B)$  from the data by fitting the analytic prediction for function  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1, \sigma_B)$  to the measured one. Thus, our “theory” depends itself on the data through  $\gamma_{\text{eff}}$ . As already explained previously, the critical test for non Gaussianity will be on the evolution of functions  $\mathcal{P}_X(\delta_{\text{th}}, \sigma_B)$  with  $\delta_{\text{th}}$ , which, once  $\gamma_{\text{eff}}$  is determined, is entirely fixed. The practical measurement of  $\gamma_{\text{eff}}$  is made straightforward by noticing that the dependence of function  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1)$  on  $\gamma$  is very well approximated by a power law<sup>¶</sup> in the domain of interest to us, i.e.  $0.4 \leq \gamma \leq 0.95$ : the fit

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1) \simeq a\gamma^b \quad (21)$$

with  $a = -1, 4099$  and  $b = 1.2395$  is accurate to 0.6%. The choice of the particular value  $\delta_{\text{th}} = 1$  is an ad hoc compromise coming from the competition between two effects: (i) the dependence on  $\gamma$  of the quantity  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  increases with  $\delta_{\text{th}}$  (Fig. 2), but (ii) the uncertainty on the determination of  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  increases with  $\delta_{\text{th}}$  (Fig. 3). In principle we could include the value of  $\delta_{\text{th}}$  used to measure  $\gamma_{\text{eff}}$  as a varying parameter in our  $\chi^2$  test, to optimize the analysis. Given the level of accuracy of our numerical experiments and since we just aim here to illustrate the method in a simple and convincing way, we did not feel necessary to do so.

Second, even if in principle we could compute analytically or numerically the variance-covariance matrix, for the sake of simplicity we evaluated it using a Monte-Carlo method based on a few hundreds of *Gaussian* realizations having the same power-spectrum and noise properties as the input map. So for each model we will consider below (pure CDM, mixed model with CDM + cosmic strings, and pure cosmic strings), the covariance matrix  $C$  is different in each case. Another issue concerning this matrix is that it might be singular. Indeed, since fractions measured at various thresholds and different scales can be highly correlated, e.g. the values at very low threshold where the dependence on  $\gamma$  is very weak, the studied  $\{\delta_{\text{th}}\}$  and  $\{\sigma_{B_i}\}$  sets have to be restricted so that  $C$  is invertible.

#### 4.2 Application on mixed models for MAP and Planck

As an illustration of the accuracy of our statistics, we apply it in the framework of MAP<sup>||</sup> and Planck Surveyor<sup>\*\*</sup> experiments to a mixed model where temperature fluctuations

<sup>¶</sup> This is also true for other values of  $\delta_{\text{th}}$ .

<sup>||</sup> <http://map.gsfc.nasa.gov>

<sup>\*\*</sup> <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/>

are seeded in part by cosmic strings and otherwise by adiabatic inflationary perturbations in standard CDM model (e.g. Bouchet *et al.* 2000 and references therein). Our approach is rather simple, since we add together a CDM map and a temperature fluctuation map obtained from ray-tracing in cosmic string simulations (Bouchet *et al.* 1988 and Bennett & Bouchet 1990) and neglect possible cross-correlations between such maps. This implicitly supposes the existence of a standard CDM inflationary epoch followed by a phase transition during which cosmic strings appear and then imprint supplementary fluctuations on the dark matter distribution. Neglecting cross-correlations mentioned just above is equivalent to assume that the distribution of cosmic string as well as their dynamical evolution is not coupled with that of cold dark matter, which should be a good assumption at the level of approximation considered in this paper.

To take into account the noise expected in the best channels of MAP and Planck Surveyor experiments (respectively  $12.8 \mu\text{K/K}$  per  $0.3 \times 0.3 \text{ deg}^2$  pixels and  $2 \mu\text{K/K}$  per  $8' \times 8' \text{ deg}^2$ ), we add an extra Gaussian white noise  $n$  to our square maps. Note again, that as long as the noise is Gaussian, its presence can be simply taken into account by a change in the value of  $\gamma_{\text{eff}}$ . Thus, our simulated temperature maps write

$$\delta_T = (1 - \alpha) \delta_T^{\text{string}} + \alpha \delta_T^{\text{CDM}} + n, \quad (22)$$

where  $1 - \alpha$  represents the fraction of the signal seeded by cosmic strings, given the fact that we impose  $\text{rms}(\delta_T^{\text{string}}) = \text{rms}(\delta_T^{\text{CDM}})$  on a map smoothed a  $7 \text{ deg}$ , corresponding to the COBE beam, i.e. we normalize roughly on COBE. Note that this normalisation is different from that of Bouchet *et al.* 2000, since they consider a string contribution to the  $C_l$ , thus their relative string contribution corresponds to our  $(1 - \alpha)^2 / ((1 - \alpha)^2 + \alpha^2)$ .

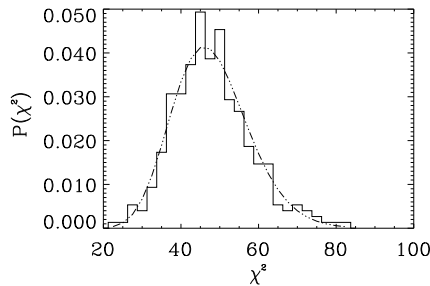
We now construct the previously defined  $\chi^2$  statistics for various values of  $\alpha$  and try to figure out what is the smallest “string like contribution” that our method should be able to detect with a high statistical significance.

##### 4.2.1 Constructing the $\chi^2$ and adequacy of the $\chi^2$ probability distribution

Even if one would like to include as many threshold values and smoothing scales as possible in the analysis, this is in practice not necessary. Indeed, some measurements are, at least in the Gaussian case, highly correlated with each other, due to e.g. some strong constraints (in the very low threshold regime,  $\delta_{\text{th}} \rightarrow -\infty$ , both  $\mathcal{P}_{\text{lake}}(\delta_{\text{th}})$  and  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}})$  tend to an asymptotic value independent of power-spectrum index). Therefore, one can restrict the set of values of  $(\sigma_B, \delta_{\text{th}})$  by requiring that the  $C$  matrix (see Eq.19) be non-singular.

From investigating of the numerical properties of  $C$ , we find for all the maps that  $\delta_{\text{th}} = -2, -1.5, \dots, +1.5$  and  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 6, 10$  and  $14$  (corresponding to respectively  $21'$ ,  $35'$  and  $49'$  on the sky) are satisfying values for the Planck case, whereas  $\delta_{\text{th}} = -1.5, -1.0, \dots, +1.5$  and  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 8$  and  $12$  (corresponding to respectively  $28'$  and  $42'$ ) are reasonable for MAP. Of course, this choice of the set of values of  $(\sigma_B, \delta_{\text{th}})$  is strongly influenced by the fact that our map is rather small: for a full sky survey, the sampling would probably be different.

Given these restrictions, it is now important to explore

8 *O. Doré, S. Colombi & F.R. Bouchet*

**Figure 7.** Histogram of the measured probability distribution of the quantity  $\chi^2$  defined by Eq. (20), from 300 noisy (Planck best channel noise level) realizations of CDM temperature fluctuations. The dot-dashed curve corresponds to a  $\chi^2$ -distribution with 47 degrees of freedom (dashed line). The good agreement allows us to use  $\chi^2$  as a measure of the Gaussian nature of the observed field.

the properties of the probability distribution function of the  $\chi^2$  statistics defined in Eq. (20). As stated previously, we expect it to follow a  $\chi^2$ -distribution, at least in the Gaussian case, since the distribution of measured values of  $\mathcal{P}_{fs}$  is well described by a Gaussian (see § 3.1). We tested this by generating 300 realizations of noisy (Planck level) CDM like only temperature fluctuations for which we measure  $\chi^2$ . Its probability distribution is drawn on Fig. 7, where we superimposed a theoretical  $\chi^2$ -distribution with 47 degrees of freedom (dof) (48 measurements:  $6 \times 4$  measured hill points fraction and  $6 \times 4$  measured void point fractions; 1 parameter,  $\gamma$ ). The agreement is obviously very good, comforting the analysis procedure and making this  $\chi^2$  statistic adequate for assessing Non-Gaussianity.<sup>††</sup>

#### 4.2.2 Ability to distinguish a “Non-Gaussianity Level” with a realistic noise level

Making use of this  $\chi^2$  statistics, we are now in position to determine how well we can distinguish non-Gaussian signatures.

In Figs. 8, 9 and 10, we display some measurements of functions  $\mathcal{P}_{lake}(\delta_{th})$  and  $\mathcal{P}_{hill}(\delta_{th})$  in the Planck case. Three values of  $\alpha$  are considered: pure CDM with  $\alpha = 1$ , hybrid model with  $\alpha = 0.3$  and pure string model with  $\alpha = 0$ . Again, On each figure, the Gaussian limit obtained from the procedure explained in detail in § 4.1 is compared to the measurements. The error bars on the theoretical predictions correspond to then the  $1\sigma$  dispersion over 300 realizations of pure random Gaussian fields with same power-spectrum and noise properties as the data, as explained in end of § 4.1.

<sup>††</sup> Here, we do not test if the  $\chi^2$  estimator always follows a  $\chi^2$ -distribution, *i.e.* also for non-Gaussian maps. Such a test is not necessary since the prior we use to analyse the data assumes underlying Gaussianity (it would be impossible to do otherwise in practice).

Very good agreement is found for CDM, as expected, while the hybrid model exhibits some discrepancies, especially for  $\mathcal{P}_{lake}$ . These discrepancies are overwhelmed in the string only model. Note that since we fit the measured value of  $\mathcal{P}_{hill}(\delta_{th} = 1)$  to estimate the Gaussian prediction, one expects non Gaussian features to show up more in the measured shape of function  $\mathcal{P}_{lake}(\delta_{th})$  than that of function  $\mathcal{P}_{hill}(\delta_{th})$ , as indeed seen at least for the mixed model. Note also that if for the mixed model, the measured  $\mathcal{P}_{lake}(\delta_{th})$  tends to lie below the Gaussian prediction, the reverse happens for the pure string model. We did not find a simple explanation for this counterintuitive result. Finally, it is important as well to recall that data points plotted on Figs. 8–10 represent only 2/3 of all the points used for the  $\chi^2$  computation since we consider one more smoothing scale,  $\sigma_B/\theta_{pix} = 6$ .

To illustrate more qualitatively these measurements, Figures 11 and 12 display, similarly as in Fig. 4, an example of initial smoothed *noise free* map, its thresholded counterpart (with  $\delta_{th} = 1$ ) and the corresponding local curvature maps with lake, saddle and hill points. Figure 11 corresponds to the hybrid model case ( $\alpha = 0.3$ ) while Figure 12 corresponds to the string only model ( $\alpha = 0.0$ ). A strong similarity can be seen between the mere CDM and the hybrid models despite the differences in measured  $\mathcal{P}_{lake}$  functions. Note also the peculiar patterns in the pure string curvature map: there seem to be rather extended saddle point regions, which calls for other specific pattern detection statistics.

Table 1 summarizes the results obtained for  $\chi^2$  using the noise level of the best channel of either Planck or MAP. It shows, for various values of  $\alpha$ , the measured  $\chi^2$ , the  $\chi^2$  per dof, as well as the probability (noted Prob.) that a random variable, in a  $\chi^2$ -distribution with the relevant (number of) dof (shown above to be adequate) is greater than the obtained  $\chi^2$ . This quantity gives therefore the significance of the detection.

Roughly speaking, the smaller the  $\chi^2$ , the better is the agreement with a Gaussian distribution. Conversely, the higher the obtained  $\chi^2$ , the more unlikely does the analyzed map follow a Gaussian distribution.

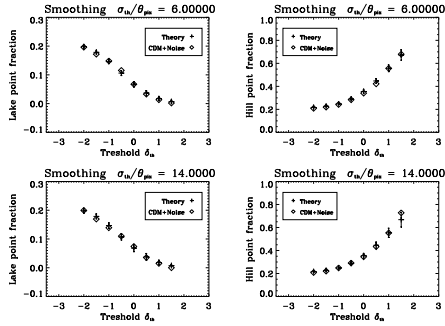
Note that the numbers displayed in Table 1 *represent in no way* the best Planck and MAP can provide with our method, since we only considered 0.3% of the sky for *one single channel*. Nevertheless, these figures give some trends of the ability of our method, the purpose of this paper.

With these limitations in mind, we see that MAP can only get a marginal detection (1% level) of the non-Gaussianity induced by string like background with  $\alpha = 0.7$ , a number already corresponding to a string contribution to the  $C_\ell$  of 15%, a number close from the 18% constraints from Bouchet *et al.* (2000). Any smaller non-Gaussian contribution is not detected with a good significance. On the other hand, we see that Planck could obtain, using this method, a highly significant detection level, *i.e.* smaller than 0.1%, for  $\alpha$  between 0.8 and 0.9, *i.e.* 5% contribution to the  $C_\ell$ , which lies much below the in the domain mentioned by Bouchet *et al.* (2000).

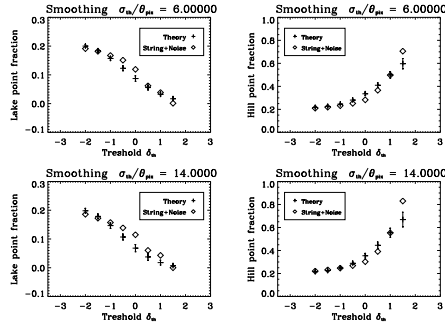
## Probing CMB Non-Gaussianity Using Local Curvature 9

**Table 1.** The measured  $\chi^2$ ,  $\chi^2/\text{dof}$  and significance probability (Prob.) are shown for various values of  $\alpha$  and for our virtual MAP and Planck experiments, as explained in the text.

	MAP (dof = 31)			Planck (dof = 47)		
	$\chi^2$	$\chi^2/\text{dof}$	Prob.	$\chi^2$	$\chi^2/\text{dof}$	Prob.
$\alpha = 1.0$	44.1	1.01	0.05	53.5	1.14	0.2
$\alpha = 0.0$	109.3	3.52	$3.1 \cdot 10^{-10}$	301.5	6.41	0.0
$\alpha = 0.7$	52.0	1.67	0.01	96.14	2.045	$3.1 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0.8$	45.8	1.45	0.04	78.5	1.67	$2.6 \cdot 10^{-3}$
$\alpha = 0.9$	37.5	1.21	0.19	52.0	1.10	0.3



**Figure 8.** Measurement of hill and lake point fractions in a Planck simulation with pure CDM ( $\alpha = 1.0$ ). The left column shows the *measured* evolution of  $\mathcal{P}_{\text{lake}}$  as a function of threshold,  $\delta_{\text{th}}$ , for two smoothing scales: top left panel corresponds to  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 6$  and bottom left panel to  $\sigma_B/\theta_{\text{pix}} = 14$ . Symbols without errorbars represent the measurements in the realization, while symbols with errorbars correspond to the Gaussian prediction matching the value of  $\mathcal{P}_{\text{hill}}(\delta_{\text{th}} = 1)$  as explained more in detail in § 4.1. The errorbars are obtained from the  $1\text{-}\sigma$  dispersion over 300 realizations. The right column of panels is similar to left column, but for  $\mathcal{P}_{\text{hill}}$ .



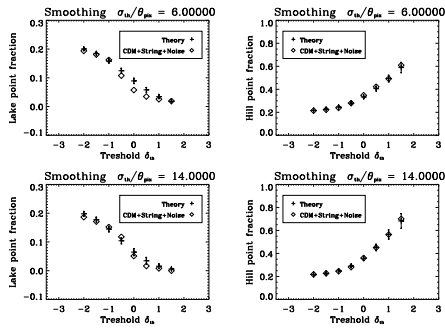
**Figure 10.** Same as Fig. 8 but for the pure string model ( $\alpha = 0.0$ ).

## 5 DISCUSSION AND CONCLUSION

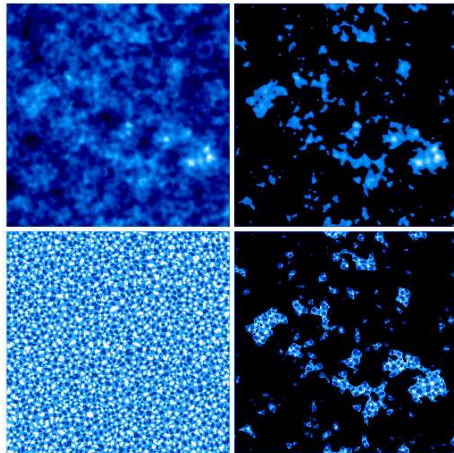
In this paper, we have tested a statistic based on local curvature measurements by counting three well defined types of points according to the sign of the eigenvalues of the Hessian of a temperature map. In the first section, we computed the relevant theoretical expectations. We validated them and demonstrated our ability to properly measure them in the next section and eventually introduced this statistic as an accurate non-Gaussianity test in the last sections, where we applied it to the case of mixed models with realistic noise levels. Even if our physical simulation might be controversial, they showed that we were able this way in the Planck case, to distinguish a non-Gaussian background amplitude lower than 20% with a very high significance using only 0.3% of the sky and one single channel. Consequently, these results are definitely positive and, as it is, this method seems to be ready to be applied on true data.

Naturally, in practice however, this test should be used in conjunction with other more standard statistical measurements, like 2-, 3-, 4-... points correlation functions or their harmonic transform, power spectrum, bispectrum, trispectrum ... or even already presented more sophisticated ones like the distribution of wavelet coefficients, etc.

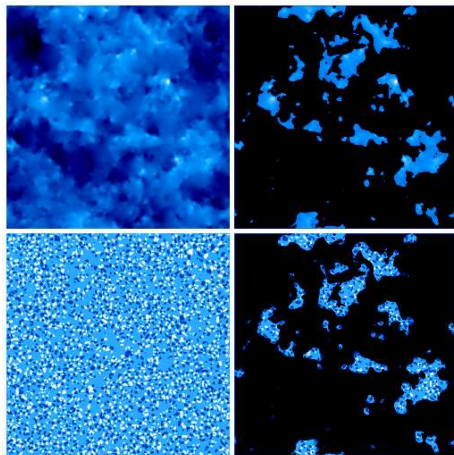
Nevertheless, even if this new method possesses some great advantages, it is not free of possible caveats, as others, and we briefly discuss both of them below.



**Figure 9.** Same as Fig. 8 but for the an hybrid model with  $\alpha = 0.3$ .

10 *O. Doré, S. Colombi & F.R. Bouchet*

**Figure 11.** Same as in Fig. 4 but for a noise free mixed model with  $\alpha = 0.7$ . Note how difficult it is to distinguish it from the mere CDM map.



**Figure 12.** Same as in Fig. 4 but with noise free string induced only temperature fluctuations. Note the interesting structures in the curvature map.

### 5.1 Possible advantages

One important advantage of these statistic its is local nature, *i.e.* the fact that we are only interested by the 8 neighboring pixels. Thus, provided the smoothing scale is not too wide, the sphericity of the observed sky is not a problem and consequently, the pixelisation of the sky should not be a problem also.

A second advantage of the method lies in the fact that it

is mathematically well-defined and simple since it depends only on one single spectral parameter,  $\gamma$ . Thus measurements are very well understood and controlled in from theoretical point of view.

A third important advantage of the method is that in some sense, provided it is Gaussian distributed, the noise, even correlated, is not really an issue since we are sensitive to non-Gaussian component only. Note however that this remark has to be understood cautiously since naturally, the higher the signal to noise ratio is, the greater is our ability to distinguish any signal feature.

### 5.2 Possible caveats

In practical situations, however, important non-Gaussian effects might be induced by other contaminants, in particular galactic foregrounds, residual stripping or point sources or any instrumental systematic error. Even if our method could detect them (somehow a diffuse galactic foregrounds should act slightly as the non-Gaussian contribution we modeled), they should be properly quantified in order no to bias the physical interpretation.

### 5.3 Outlooks

As we mentioned earlier, by moving to second order derivatives, this work opens the way to many more characterization of random Gaussian field. As was mentioned before, we expect that an analogous work could be done by considering critical points only, which would lead, *e.g.*, to a measurement of the Euler characteristic as a function of threshold. However, we expect this restriction to be less efficient in probing non-Gaussianity since it appears that by keeping all types of points we exploit more the full structure of the probability distribution function, but this point will be demonstrated in a future work.

Furthermore, this method might be able also to detect the level of Gaussianity induced by large scale structure lensing on CMB.

It would be interesting and indeed necessary to compare the ability of other estimators on this kind of test. We hope to apply it very soon on true data.

### ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Roland Triay for organizing a prolific “Cosmological school” at Porquerolles where this work has been initiated, to Francis Bernardeau for useful discussions at an early stage of this work and to Christophe Pichon for valuable help on the use of Mathematica. S.C. thanks Jean-Philippe Belial for quite useful suggestions on the methodological approach.

### REFERENCES

- R. J. Adler, *The geometry of random fields*, John Wiley & sons, 1981
- N. Aghanim & O. Forni, *A&A*, 347, 409, 1999
- N. Aghanim & O. Forni, *A&A*, 365, 341, 2001
- A. Banday, S. Zaroubi & K.M. Górski, *ApJ*, 533, 575, 2000

*Probing CMB Non-Gaussianity Using Local Curvature* 11

- J. M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser, A.S. Szalay, *ApJ*, 304, 15, 1986
- D.P. Bennett, F. R. Bouchet, *Phys. Rev. D*, 41, 2408, 1990
- F. Bernardeau, *A&A*, 338, 767, 1998
- J. R. Bond, G. Efstathiou, *MNRAS*, 226, 655, 1987
- F. R. Bouchet, D.P. Bennett, A. Stebbins, *Nature*, 335, 29, 1988
- F. R. Bouchet, P. Peter, A. Riazuelo, M. Sakellariadou, submitted to *Phys. Rev. Lett.*, astro-ph/0005022
- P. Coles, *MNRAS*, 238, 319-438, 1989
- S. Colombi, D. Pogosyan, T. Souradeep, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 5515, 2000
- P.G. Ferreira, J. Magueijo & K.M. Górski, *ApJ*, 503, 1, 1998
- J. R. Gott *et al.*, *ApJ*, 352, 1, 1990
- A.T. Lee *et al.* 2001, submitted to *ApJ*, astro-ph/0104459
- X. Luo, *Phys. Rev. D*, 49, 8, 1994
- N. W. Halverson *et al.*, submitted to *ApJ*, astro-ph/0104489
- A. F. Heavens, R. Sheth, *MNRAS*, 310, 1062, 1999
- A. F. Heavens, S.J. Gupta, *MNRAS*, 324, 960, 2001
- G. Hinshaw, A.J. Banday, C.L. Bennett, K.M. Gorski, A. Kogut, *ApJ*, 446L, 67H, 1995
- J. Magueijo, *ApJ*, 528, 57, 2000
- C.B. Netterfield *et al.*, astro-ph/0104460, submitted to *ApJ*, 2001
- M. G. Santos *et al.*, astro-ph/0107588
- G. Smoot *et al.*, *ApJ*, 437, 1, 1994
- M. Takada, to appear in *ApJ*, astro-ph/0101449
- N. Vittorio & R. Juszkiewicz, *ApJ Lett.*, 314, L29, 1987
- L. Verde, A.F. Heavens, *ApJ*, 553, 14, 2001
- E. Komatsu, B.D. Wandelt, D.N. Spergel, A.J. Banday, K.M. Górski 2001, submitted to *ApJ*, astro-ph/0107605



## .5 Compétition entre chocs et palier d'entropie

S. Dos Santos & O.Doré

*Competition between shocks and entropy floor : unifying groups and  
clusters of galaxies*

Astronomy and Astrophysics, in press (2001)





*Astronomy & Astrophysics* manuscript no.  
(will be inserted by hand later)

## Competition between shocks and entropy floor : unifying groups and clusters of galaxies

S. Dos Santos<sup>1</sup> and O. Doré<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics & Astronomy, University of Leicester, 1 University Road, Leicester LE1 7RH, UK  
e-mail: [ssa@star.le.ac.uk](mailto:ssa@star.le.ac.uk)

<sup>2</sup> Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard Arago, F-75014 Paris, FRANCE  
e-mail: [dore@iap.fr](mailto:dore@iap.fr)

**Abstract.** Semi-analytic models of X-ray clusters and groups of galaxies, relying on the idea that there was a non-gravitational energy injection in these systems, are able to reproduce many observed correlations, in particular the  $L_X - T$  relation and the “central entropy floor” in groups. Limiting models exist which describe the behaviour of clusters and groups separately, but no analytic modeling has yet been found to unify both mass ranges. *It is the aim of this paper to provide such an analytic model.* Our description relies on a now standard description of the shock thought to occur in these systems near the virial radius (Cavaliere et al., 1998), the isothermality and spherical symmetry of the intracluster medium, as well as the reinterpretation of observed quantities (like the X-ray luminosity, the gas mass  $M_{ICM}$  and the central SZ effect  $y_0$ ) in terms of the specific entropy. This allows the derivation of analytic expressions for several observed correlations ( $L_X - T$ ,  $M_{ICM} - T$ ,  $y_0 - T$ , ...) and their normalisation encompassing *both the group and the cluster regimes*. The analytic predictions compare very well with observations, as well as with more elaborated semi-analytic schemes. This agreement allows a reinterpretation of the  $L_X - T$  relation (via the quantity  $L_X/T^{7/2}$ ) and the  $y_0 - T$  relation (via  $y_0/T^{5/2}$ ) as indirect measures of the non-gravitational entropy content of groups and clusters of galaxies. Finally, we emphasize the need for shock heating, even in the group mass range : *shocks can not be completely suppressed in groups* (and thus groups can not be entirely isentropic) unless an unacceptably high entropy floor is needed in order to break the self-similarity in the  $L_X - T$  relation.

**Key words.** Hydrodynamics – Shock waves – clusters : galaxies : general – X-rays : galaxies : clusters – Methods : analytical

### 1. Introduction

For ten years, it has been known that X-ray observations of clusters of galaxies can not be reproduced in simple self-similar models, where the central gas density is proportional to dark matter density. Kaiser (1991) and Evrard & Henry (1991) advocated a preheating of the gas before it fell into the cluster potential to recover the observed correlations. Later, X-ray observations of groups of galaxies have strengthened the case for a non-gravitational entropy injection in these systems, in particular by the observation of the so-called “entropy floor” (Ponman et al., 1999). These authors showed that the central entropy level in groups (outside the cooling-flow radius) is higher than the level the sole cosmological shocks can provide, while being well in accord with adiabatic numerical simulations (*e.g.*, including no dissipative physics) in clusters. This entropy injection could be due to supernovae explosions (the so-called feedback from star formation) or other sources as

active galactic nuclei. Several semi-analytic schemes that elaborate on this idea have been proposed to reproduce the curvature of the  $L_X - T$  relation in the groups' mass range (where the effects of the preheating are thought to be the highest, see Cavaliere et al., 1997; Bower, 1997; Valageas & Silk, 1999; Valageas & Schaeffer, 2000; Wu et al., 2000; Bower et al., 2000). In particular, Cavaliere et al. (1997, 1998, 1999, hereafter CMT) have introduced a simple model, where the bending is provided by the differential strength of a shock occurring at the virial radius in a preheated gas. Their description relies on the physical modelling of the shock interface, using Hugoniot relations, and reproduces naturally the central observed entropy floor. While this model highlights the important role of shocks and entropy floor in the formation of clusters and groups, no *analytic* description of the X-ray observed relations has yet been found to encompass both groups and clusters. *The aim of this paper is to present such a model and compare it to observations.*

Send offprint requests to: S. Dos Santos

However, despite the success of these semi-analytic schemes when confronted to observations, difficult problems remain, as for example the fact that a reheating by supernovae (hereafter SN) explosions requires an incredibly high efficiency of the transfer of energy from SN remnants to the intergalactic medium (Valageas & Silk, 1999; Bower et al., 2000). In particular, the cooling of the SN remnants will obviously decrease this transfer efficiency, and must be ignored in these models. While a combination of SN and quasars (hereafter QSOs) reheating is probable and would alleviate this problem, Bryan (2000) has proposed that differential galaxy formation between groups and clusters (which would lower the central entropy in groups and allow higher entropy gas to flow into the center) can explain the curvature of the  $L_X - T$  relation and the entropy floor. However, it is well known that without preheating, most of the available gas in the universe would have formed stars today, which is not observed (this the so-called “overcooling problem”, see Blanchard et al., 1992; Balogh et al., 2001). This much-needed feedback in galaxy formation would certainly have an impact on the formation of clusters and groups. Valageas & Silk (1999) have indeed shown that galaxy and cluster feedback differing requirements are likely to provide a tight constraint on the amount of preheating in the universe. But, even in the preheated scenarios, there is actually no consensus on the entropy injection epoch. While most of the studies have focussed on “external preheating” models (where the entropy injection occurs before the formation of groups and clusters *e.g.*, before the gas is compressed by shocks) because low density gas requires much less energy than high density one to be raised to a given entropy level (and also because the star formation rate seems to peak rather early in the universe evolution), Loewenstein (2000), from a series of approximate static hot gas models and Brighenti & Mathews (2001), from 1D numerical simulation with cooling, mass dropout and star formation feedback, have argued that most of the heating occurred during or after the assembly of the group or cluster gas. The efficiency problem of SN explosion is still present, but can be alleviated by an initial mass function flatter than the Salpeter one (Brighenti & Mathews, 2001). These are the so-called “internal preheating” models.

In this paper, we focus explicitly on an external preheating model. Internal preheating models require spatially-dependent and time-dependant star formation rates to provide the amount of injected entropy, while external preheating models only require the level of entropy before the gas falls in a cluster or a group. This simplification allows us to obtain a completely analytic model that describes both groups and clusters. The physical approach we follow consists of deriving scaling relations, *e.g.*  $L_X - T$ ,  $y - T$ ,  $y - L_X$  by linking these observed quantities to the specific entropy profile in the system. For this purpose we first derive an *analytic expression for the entropic profile normalisation at the virial radius* of clusters and groups by discussing shocks, as in CMT. Using this relation we then derive analytically the relevant scaling relations and

compare them to data. Following Tozzi & Norman (2001), we highlight the key role of entropy and argue that it indeed constitutes the best observable in clusters, allowing to derive analytical expressions for standard X-ray and Sunyaev-Zeldovich (hereafter SZ) correlations. This leads us to reinterpret these relations in terms of global entropy content in a well physically motivated manner.

The plan of the paper is as follows : in section 2, we present the shock model and derive an expression for the normalisation of the entropy profile at the virial radius. This expression, containing a free normalisation, is fitted to observations. In section 3, we relate the X-ray luminosity to the entropy profile and derive an analytic expression for the shape of the  $L_X - T$  relation, which is subsequently compared to observations *using only the fitted parameter of the last section*. The same method is followed in sections 4, 5 and 6 to obtain analytic expressions for the  $M_{ICM} - T$ ,  $f_{gas} - T$ ,  $y_0 - T$  and  $y_0 - L_x$  correlations (where  $M_{ICM}$  is the gas mass,  $f_{gas}$  is the gas fraction and  $y_0$  is the central Compton parameter). In each of these parts, we provide a detailed comparison with previous work. Section 7 discusses a reinterpretation of these correlations in terms of the total entropy content in groups and clusters, tests it using a semi-analytic model and discusses the main hypotheses we make. Moreover, a comparison of our results for the entropy floor with other theoretical models is made. Section 8 summarizes the present work and concludes. We also compute the numerical values of the normalisations of the correlations found and summarize all these results in Appendix A, allowing to use them easily in another context. Appendix B computes the infalling velocity as a function of the mean mass of the system and compares to hydrodynamic simulations. Finally, Appendix C, introducing a simple model for the entropy profile of groups, computes the shape factors appearing in the different normalisations.

Unless otherwise stated, we use  $H_0 = 100 h_{2/3} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  with  $h_{2/3} = 2/3$ , which gives approximately  $H_0 = 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . We rescale all the data used in this paper to this value.

## 2. Entropy and shocks in clusters and groups

The study of the equilibrium state of X-ray clusters and groups of galaxies requires the physical description of the complex interplay between baryonic and non-baryonic dark matter. To tackle this problem analytically requires several simplifying hypotheses. The following assumptions are reasonable and will be thus assumed henceforth (see Sarazin, 1988, for a review and a discussion of the main assumptions).

First, the hot and diluted plasma of ions and electrons constituting the intracluster medium (hereafter ICM) is treated as a single species perfect gas satisfying

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_p}, \quad (1)$$

where  $P$ ,  $\rho$ ,  $T$  denote respectively the pressure, density and temperature of the baryonic gas, while  $k$  denotes the Boltzman constant. Second, neglecting the ICM mass with regards to the DM mass, and assuming *stationarity* (no gravitational potential variation on time scales smaller than the hydrodynamic time scale, *e.g.* no recent mergers), the ICM is assumed to be in *hydrostatic equilibrium* (hereafter HSE) in the dark matter gravitational potential  $\phi$ . We can thus write the continuity and the Euler equation as follows :

$$\nabla(\rho v) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi \quad (3)$$

where  $v$  is the gas velocity and  $\phi$  the gravitational potential. Equations (2), (3) and (1), together with the energy conservation equation and Poisson equation (the use of which can be avoided if an approximate analytic expression for  $\phi$  is chosen, *e.g.*, neglecting the gravitational contribution of the baryons) form a closed set of equations, whose resolution provides the radial profiles of all the quantities of interest in the gas.

To solve this set, boundary conditions are required. In the present paper, we are interested in the variations of these boundary conditions with the total mass of the system (or equivalently with its mean temperature). Indeed, the previous equations will describe the equilibrium of baryonic gas in the underlying potential, whatever the total mass of the system. We argue and show in the following that changes in the boundary conditions, when explicitly written as a function of the mean temperature, allow us to derive the change in global correlations, such as the  $L_X - T$  relation, on a scale going from clusters to groups of galaxies. For this purpose, we use the fact that the flow of gas on a cluster becomes supersonic in the vicinity of the virial radius  $r_v$  (Teyssier et al., 1997). We will then show that a standard modeling of the *resulting shock* (following CMT) leads to the appropriate boundary conditions. We will consider hereafter that the boundary conditions take place after the last major merger of the system, as appropriate in a hierarchical picture of structure formation.

The last hypothesis we will use is that within the virial radius, the ICM is *isothermal*. This hypothesis will not be used in the derivation of the boundary conditions (sec. 2.1) but in the derivation of the global correlations in groups and clusters (sec.s 3 and 5). Both observations Markevitch et al. (1998) and simulations (Teyssier, 2001) show that this approximation is good into a factor two and is thus sufficient for our purpose.

Finally, let us recall an hypothesis necessary underlying every work published using the entropy of the ICM, but rarely stated : *the local thermodynamic equilibrium hypothesis* (hereafter LTE). By definition, in a state of global thermodynamic equilibrium, temperature and pressure (and thus density) are constant throughout the system, and the state functions of the system (*e.g.* entropy) have a determined dependency on the state variables chosen (and so a fixed value). In the LTE however, temperature and pressure can vary from point to point (as is

obvious in clusters from X-ray observations for example) and, locally only, the system is in thermodynamical equilibrium. Thus, the state functions have the same dependency on state variables as in global equilibrium, but vary now from point to point as do the latter. Note that this hypothesis is likely to break down at smaller scales than the ones of interest to us, due to turbulence or magnetic effects. This hypothesis is crucial if we want to use the usual analytic expression of the *specific entropy* of the ICM,  $s$ , namely

$$s = S/c_v = \ln \left( \frac{kT}{\rho^{\gamma-1}} \right) \quad (4)$$

where  $\gamma$  is the polytropic index of the gas. The thermodynamical state of the gas is fully known as soon as the entropy profile of the gas is known. Since we want to highlight the key role of entropy as “an observable” we choose to describe the physical state of clusters in terms of entropy, or more appropriately and equivalently in terms of the *adiabat*, defined as

$$K = (\mu m_p)^{\gamma-1} e^s = \frac{kT}{n^{\gamma-1}} = (kT) n^{-2/3}, \quad (5)$$

where  $n = \rho/(\mu m_p)$ . In the following,  $T$  will denote the temperature in keV (*i.e.*, we will replace everywhere  $kT$  by  $T$ ). Note that from now on the polytropic  $\gamma$  index will be fixed to its standard value of 5/3. The definition of the adiabat differs from the widely used definition of Balogh et al. (1999) (by a constant factor  $(\mu m_p)^{\gamma-1}$ ) but allows a direct comparison to observations.

## 2.1. A general shock model

We first aim at deriving adiabat boundary conditions based on the Rankine-Hugoniot relations, used in the same form as CMT.

### 2.1.1. The Rankine-Hugoniot relations

Let the infalling gas velocity reach the sound speed at  $r = r_v$  and consider subsequently that a shock form at this radius. Let the temperature, the density and the velocity of the infalling gas before the shock be respectively  $T_1$ ,  $n_1$  and  $v_1$ , and the post-shock temperature, density and velocity be  $T_2$ ,  $n_2$  and  $v_2$ . If the shock efficiency is very high, *i.e.* the post-shock velocity  $v_2$  is null *in the rest-frame of the cluster center of mass*, the Rankine-Hugoniot relations yield (CMT) :

$$kT_2 = \frac{\mu m_p v_1^2}{3} F(\epsilon), \quad (6)$$

with

$$F(\epsilon) = \frac{(1 + \sqrt{1 + \epsilon})^2}{4} + \frac{7}{10} \epsilon - \frac{3}{20} \frac{\epsilon^2}{(1 + \sqrt{1 + \epsilon})^2} \quad (7)$$

and

$$\epsilon = \frac{15}{4} \frac{kT_1}{\mu m_p v_1^2}. \quad (8)$$

At the same time, the ratio between post-shock ( $n_2$ ) and pre-shock ( $n_1$ ) density is given by :

$$\frac{n_2}{n_1} = 2 \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) + \left[ 4 \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right)^2 + \frac{T_1}{T_2} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Note that since the ICM within  $r_v$  is assumed to be isothermal, its temperature is equal to the temperature  $T_2$  after the shock.

Using the formulas above, we will now derive a general expression for the adiabat jump at the shock, which will depend on the system mean temperature. This virial adiabat normalisation will provide us with the change in the boundary conditions necessary to describe groups and clusters in a unique analytic model.

## 2.2. The adiabat after the shock

To find a general expression for the post-shock adiabat, we first express the ratio  $T_1/T_2$  as a function of  $\epsilon$  :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{5} \frac{\epsilon}{F(\epsilon)}. \quad (10)$$

Introducing this expression in equation (9), one has :

$$n_2 = 2 n_1 \left( \left( 1 - \frac{4}{5} \frac{\epsilon}{F(\epsilon)} \right) + \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \frac{\epsilon}{F(\epsilon)} \right)^2 + \frac{\epsilon}{5 F(\epsilon)} \right]^{1/2} \right). \quad (11)$$

Using then equations (6), (8) and (11), the post-shock adiabat  $K_2$  is easily expressed as a function of the pre-shock adiabat  $K_1$  and  $\epsilon$  in the following manner :

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{k T_2}{n_2^{2/3}} \\ &= \frac{5}{2^{8/3}} K_1 H(\epsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

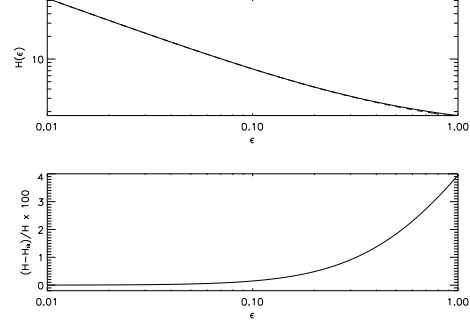
where

$$H(\epsilon) = \frac{F(\epsilon)}{\epsilon} \left( \left( 1 - \frac{4}{5} \frac{\epsilon}{F(\epsilon)} \right) + \left[ \left( 1 - \frac{4}{5} \frac{\epsilon}{F(\epsilon)} \right)^2 + \frac{\epsilon}{5 F(\epsilon)} \right]^{1/2} \right)^{-2/3}. \quad (13)$$

Even if this last expression looks complicated, it can be straightforwardly expanded in a Laurent serie in the vicinity of  $\epsilon = 0$ . We obtain :

$$H(\epsilon) = \frac{17}{10} 2^{-2/3} \left( 1 + \frac{10}{17} \frac{1}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (14)$$

Checking the validity of this expansion in the range  $0 \leq \epsilon \leq 1$  we find an agreement better than 4% (figure 1) which is enough for our purpose (the error of the approximation reaches a constant 15% level at large  $\epsilon$ ). Thus we will neglect higher order corrections.



**Fig. 1.** Top : plot of the function  $H(\epsilon)$  (equation 13, solid line), together with the two first order of its expansion (equation 14, dashed line). Both functions are hardly distinct. Bottom : Percentage difference between  $H$  and its expansion. The agreement is better than 4% in the relevant  $\epsilon$  range (and always better than 15% for all values of  $\epsilon$ .)

As a consequence, for the all range from groups to rich clusters, one can write to a very good approximation :

$$K_2 = \frac{17}{16} 2^{-1/3} K_1 \left( 1 + \frac{10}{17} \frac{1}{\epsilon} \right). \quad (15)$$

Note that this expression that fits so well the general adiabat expression is not really a surprise. Its physical significance is indeed straightforward. To show this, let us take two limiting behaviour, namely in the cluster and in the group mass range.

Since rich clusters of galaxies accrete mainly small clumps and diffuse gas, the *cold inflow* or *strong shock* limit is appropriate. Consequently it is usually argued that the entropy of rich clusters is dominated by shock created entropy. Indeed, for this approximation we have  $T_2 \gg T_1$  and  $\epsilon \ll 1$ , and so (from eq. 15)

$$K_2 \simeq \frac{5}{8} 2^{-1/3} K_1. \quad (16)$$

On the other hand, for groups of galaxies, the *weak shock* or *adiabatic infall* approximation is more appropriate. Indeed since the infall speed tends to be lower, and since groups accrete preheated gas, the weak shock limit (whose limit is the true adiabatic infall) is appropriate (CMT)<sup>1</sup>. Indeed, taking the limit  $\epsilon \rightarrow 1$ , eq. (15) yields

$$K_2 \simeq \frac{27}{16} 2^{-1/3} K_1. \quad (17)$$

This means that the entropy content of groups is dominated by the “adiabatically accreted” gas, hence the existence of a so-called entropy floor (the last expression of  $K_2$  being independent of  $\epsilon$ ).

<sup>1</sup> Note that this hypothesis of adiabatic infall has been shown to allow to reproduce the  $L_X - T$  relation in the group range by Balogh et al. (1999)

The analytic expression in eq. (15) thus provides a well physically motivated expression for the competition between shocks and entropy floor that rules the adiabat virial normalisation from groups to clusters.

### 2.3. Linking groups and clusters

#### 2.3.1. Defining a general analytic $K - T$ relation

We now want to make use of the previously derived expression (15) to predict a general relation for the  $K - T$  relation for groups and clusters.

First, making use of eq. (8) and eq. (15) we rewrite

$$K_2 = \frac{17}{16} 2^{-1/3} K_1 \left( 1 + \frac{8}{51} \frac{\mu m_p v_1^2}{k T_1} \right). \quad (18)$$

Second, we need to express the infall velocity  $v_1$  as a function of the mean temperature of the system. This is done in Appendix A, where we show that using the virial theorem, the  $M - T$  relation, together with the assumption of adiabatic cold inflow, we can write ( $\phi_1$  being a characteristic virial radius gravitational potential,  $T_*$  a characteristic temperature and  $\eta$  a dimensionless constant, see eq. B.5, B.11 and B.13) :

$$v_1^2 = -2\eta\phi_1 \left( \frac{T}{T_*} \right). \quad (19)$$

Note that from now on we will assume notations of Appendix A.

This leads naturally to:

$$K_2(T) = \frac{17}{10} 2^{-2/3} K_1 \left[ 1 - \frac{16}{51} \eta \frac{\mu m_p \phi_1}{k T_1} \left( \frac{T}{T_*} \right) \right] \quad (20)$$

that we rewrite

$$K_2(T) = K_0 \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right) \right], \quad (21)$$

where we have defined<sup>2</sup>

$$K_0 = \frac{17}{16} 2^{-1/3} K_1 \quad (22)$$

and

$$T_0 = -\frac{51}{16} \frac{k T_1}{\eta \mu m_p \phi_1} T_*. \quad (23)$$

*The scaling relation (21) is a key result of our paper.* It states how the entropy jumps due to the shock changes with the mean temperature of the system. Written this way, the last formula has two free parameters : a normalisation parameter  $K_0 \simeq K_1$ , *i.e.* the adiabat before the shock, and the temperature  $T_0$  that marks the transition from the adiabatic inflow to the strong shock regime.

Deriving the value of  $K_1$  requires a whole semi-analytic scheme, which would require a model of the entropy evolution of the intergalactic medium (hereafter IGM) as the universe evolves (see *e.g.* Valageas & Silk, 1999). This is

<sup>2</sup> Remark that  $17/16 \times 2^{-1/3} \simeq 0.843$ , so that  $K_0 \simeq 0.843 K_1$ .

clearly beyond the scope of the present paper, and we will thus constrain  $K_1$  by comparison with observations (which only means that the normalisation of our model is left free). However,  $K_0$  and  $T_0$  are not independent parameters and can be related by simple physical considerations as will be shown in the next section.

Once this is done, the scaling relation (21) is left with *only one normalisation parameter*  $K_0$ .

#### 2.3.2. Relating $K_0$ and $T_0$

First, to explicit the relation between  $K_0$  and  $T_0$ , we need to specify the value of both  $\eta$  and  $T_1$  in equation (23). Using the results of Miniati et al. (2000) for the infall velocity in hydrodynamic simulations (see eq. B.15 and Appendix for notations), a value for  $\eta$  can be derived by equating eq. (B.15) and eq. (19) :

$$\eta = -\frac{v_{s0}^2}{2\phi_1} \left( \frac{T_*}{T_s} \right) \quad (24)$$

which, when introduced in equation (23), gives :

$$T_0 = \frac{51}{8} \frac{k T_1}{\mu m_p v_{s0}^2} T_s, \quad (25)$$

where  $T_s$  and  $v_{s0}$  are known (appendix A).

The relation between  $K_0$  and  $T_0$  will appear when expliciting  $T_1$ . Indeed we can write it as a function of the pre-shock adiabat  $K_1$  :

$$T_1 = K_1 n_1^{2/3}. \quad (26)$$

The overdensity that eventually collapses and reaches a density  $\rho_1$  at  $r_v$  has decoupled from the Hubble expansion at a turn-around redshift  $z_{ta}$  where its density was  $\rho_{ta}$  and its radius was  $r_{ta}$ . Following Balogh et al. (1999), we assume first that the IGM was preheated (non-gravitationally) before  $z_{ta}$  and its adiabat raised to the value  $K_1$ . Second, we also assume that between  $r_{ta}$  and the shock radius  $r_v$  itself, the gas has an isentropic behaviour. To fix the value of the overdensity (and thus the density)  $\delta_{ta} = (\rho_{ta} - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  at the turn-around, we will consider the simplest collapse model, *i.e.* the spherical collapse model in a given cosmology.

By definition of the baryonic fraction  $f_B$  and the overdensity  $\delta_{ta}$  we can write :

$$\rho_{ta} = (1 + \delta_{ta}) \rho_c f_B \quad (27)$$

where  $\rho_c$  is the critical density. Inserting this last equation in eq. (25), one obtains :

$$T_0 = \frac{51}{8} \frac{K_1 ((1 + \delta_{ta}) \rho_c f_B)^{2/3}}{(\mu m_p)^{5/3} v_{s0}^2} T_s, \quad (28)$$

which relates  $K_0$  and  $T_0$  via eq. (22).

Consequently, to fix the numerical value of  $T_0$  we need to specify a value of  $K_1$ . We choose to assume the value of the observed entropy floor visible in groups of galaxies.

A value of  $K_1 = 120 \text{ keV cm}^2$  is inferred from the data (Lloyd-Davies et al., 2000, see the next section).

Then we assume a flat  $\Omega_m = 1$  universe with  $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  and the baryonic fraction as fixed by Big-Bang Nucleosynthesis standard, *i.e.*  $f_B = 0.015 h_{100}^{-2} / \Omega_m$  (Olive et al., 2000). For a spherical collapse model  $\delta_{ta} = 9\pi^2/16$ . Note however that in the widely used hierarchical structure formation paradigm, this monolithic formation model is too simplistic. Indeed, since the majority of the infall of group of galaxies occurs through filaments, an overdensity of  $\delta_{ta} \sim 10$  should be more appropriate. Considering then the values of  $v_{s0}$  and  $T_s$  specified in the Appendix, we find that  $T_0 = 1.86 \text{ keV}$  for  $\delta_{ta} = 9\pi^2/16$  and  $T_0 = 2.62 \text{ keV}$  for  $\delta_{ta} = 10$ . This is quite insensitive to the adopted cosmology, since for an  $\Omega_m = 0.3$  universe, one finds  $T_0 = 1.71 \text{ keV}$  and  $2.33 \text{ keV}$  respectively. It is thus obvious that we can take for  $T_0$  an intermediate value between these two extremes.

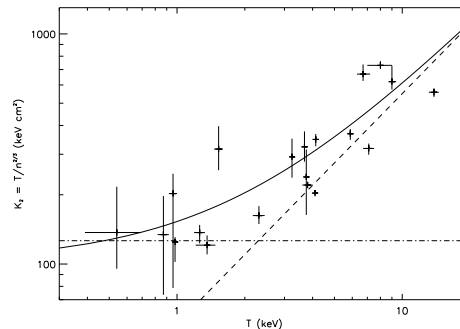
In the following, we will thus consider that  $T_0$  is fixed at  $2 \text{ keV}$ , and that the only free parameter of the model will be the normalisation factor  $K_0$ . Moreover, choosing a value of  $T_0$  between  $1.5$  and  $2.5 \text{ keV}$  does not alter the quality of the fits we present in the next sections.

Looking at eq. (21),  $T_0$  has a simple physical interpretation : it is the system mean temperature where the effect of an entropy floor begins to change the adiabat jump during the virial shock. For systems with  $T < T_0$ , the pre-shock entropy is high enough to reduce the shock and a quasi-adiabatic inflow takes place (but the shocks are not completely suppressed, see section 7.4). For  $T > T_0$ , the shock adiabat jump brings the post-shock adiabat to values much higher than the entropy floor, the latter having less and less incidence as  $T$  increases. Thus we find that this transition occurs around  $2 \text{ keV}$ .

### 2.3.3. Comparing with observations

X-ray observations of groups and clusters of galaxies have brought a great amount of information on the gas equilibrium in these systems. Unfortunately, due mostly to the high background of the instruments and the gas density decline with radius, there are not yet entropy observations available up to the virial radius, that would allow to test directly our model (and more generally the scheme invented by CMT). The new generation of satellites (Chandra and XMM-Newton) is expected to bring new observations near the virial radius, allowing to test different formation scenarios of clusters and groups (see *e.g.*, Tozzi et al., 2000).

Nevertheless, some data on the central adiabat value of the gas in groups and clusters are available. Ponman et al. (1999) were the first to show that groups have a central adiabat higher than the one they would have if it had been imposed by shocks only. Recently, Lloyd-Davies et al. (2000) have refined these observations, taking into account the temperature gradients, while increasing the statistics. This is the so-called observed “entropy floor”.



**Fig. 2.** Post-shock adiabat  $K_2$  as a function of the mean temperature of the system. The solid line is obtained with equation (21), with  $K_1 = 120 \text{ keV cm}^2$  (*i.e.*,  $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ ). Note that only the normalisation is a free parameter, as the reference temperature  $T_0 = 2 \text{ keV}$  is obtained from the value of  $K_1$ . The dashed line is a  $K \propto T$  fit to the systems above  $4 \text{ keV}$  found by Helsdon & Ponman (2000). The similarity of the shock model adiabat normalisation (computed at the virial radius) with the data taken at the center ( $R = 0.1 r_v$ ) allows us to postulate an approximate self-similarity in the specific entropy profile in the Sec. 3.

While cool systems have a constant central adiabat, hotter clusters follow naturally the results of numerical simulations without a preheating phase (which predict that  $K \propto T$ ). Note that our model predicts exactly the same behaviour, exhibited in the post-shock adiabat analytic expression of eq. (21). However, we compute the adiabat near the virial radius, while the data come from the central parts of the systems. Nevertheless, observations and theory can be compared if we assume that the adiabat difference between two different temperature systems is conserved when going from the virial radius to the central part. This implies that the physical mechanism responsible for the post-shock adiabat value (competition between shocks and an entropy floor) is the same as the one responsible for the central adiabat value. This is indeed a reasonable assumption, since 3D hydrodynamical simulations of the formation of clusters show that, after the last major merger, a quasi-spherical shock forms and expands, that leaves behind an increasing adiabat profile (see *e.g.*, Evrard, 1990; Frenk et al., 1999). The same physics is thus at work in the center and in the outer parts of clusters, allowing the physical description of the two regions to coincide. Indeed, the only difference between these two regions is that the universe will have evolved when the shock reaches the present-day virial radius, as compared to the time when the central entropy is set. We thus don't expect the observational value of  $K_1$  (found by normalisation to the observations) to be representative of the present adiabat of the universe, but it should instead be representative of the IGM at the time when the smaller

mass systems formed. If virial radius observations of the adiabat were available for the same systems, we expect then that the same analytic expression as in eq.(21) would be a good description of the data, with a different value of  $K_1$ , representative of the present-day adiabat of the IGM.

Figure 2 shows the comparison of eq. (21) with data from Lloyd-Davies et al. (2000). Only the normalisation was fitted here, with a value of  $K_1 = 120 \text{ keV cm}^2$  (giving  $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ ), while we have taken  $T_0 = 2 \text{ keV}$ , derived with the same value of  $K_1$  in the last section. Replacing eq. (28) in eq. (21) instead, and fitting for  $K_1$  gives an undistinguishable analytic curve. The dashed line is the result of a  $K \propto T$  fit to the systems above  $4 \text{ keV}$  found by Helsdon & Ponman (2000). This temperature dependence of the adiabat is taken from numerical simulations (see Ponman et al., 1999). The dot-dashed line is a constant gas entropy fitted to the four lowest temperature systems by Lloyd-Davies et al. (2000) and has a value of  $139 \text{ keV cm}^2$ . The agreement between the analytic formula and the data is remarkable. Indeed, using the fitted value of  $K_1$ , the computed  $T_0$  value agrees very well with the temperature of the intersection between these two limiting behaviours (see last section). This shows that eq. (21) is not a mere analytic formula (which could have been inferred from the observations), but succeeds in capturing both ingredients which fix the central entropy value : the entropy floor (dot-dashed line in the groups mass range) and the shocks (dashed line, in the cluster mass range).

By adjusting the normalisation of our analytic model using the data we derive a value for  $K_1$ . Then making use of this relation we get directly for any system at a given temperature  $T$  (either a group or a cluster) the normalisation of the adiabat profile. It is now important to check whether we are able to use this relation to derive realistic  $L_X - T$  and  $y - T$  relations for both groups and clusters.

### 3. From the adiabat to the $L_X - T$ relation

The total X-ray luminosity of a local cluster (group) of galaxies is expressed as :

$$L_X = \int_V n_e^2 \Lambda_e(\Delta E, T_e) dV, \quad (29)$$

where  $n_e$  is the electronic density and the integration is carried out over the whole volume  $V$  of the system.  $\Lambda_e(\Delta E, T_e)$  denotes the local X-ray emissivity of the cluster gas within a given energy band  $\Delta E$ . For example, in the case of pure thermal Bremsstrahlung emission observed with contemporary wide-band satellite, one has  $\Lambda_e \propto T_e^{1/2}$ .

#### 3.1. An analytic prediction for the $L_X - T$ relation

We can now express equation (29) as a function of  $K$  and thus link the X-ray luminosity with the temperature and the adiabat :

$$L_X = \int_V \frac{T^3}{K^3} \Lambda_e(\Delta E, T) dV. \quad (30)$$

Since we assume the cluster to be isothermal and since in general the emissivity can be written as a power-law function of the temperature with index  $\alpha$ , one has :

$$\frac{L_X}{T^{3+\alpha}} = \Lambda_0 \int_V \frac{dV}{K^3}, \quad (31)$$

$\Lambda_0$  being the normalisation of the emissivity.

Equation (31) gives us a direct link between  $L_X$ ,  $T$  and  $K$ . Was the expression of  $K$  as a function of  $T$  known, it would enable us to predict the shape of the  $L_X - T$  relation. However, the result of the previous section (21) gives us the change in the adiabat *normalisation* as a function of temperature, but since the integral in eq. (31) is computed over all the system volume, in principle we need the adiabat profile to compute it. However, if we make the further assumption that *the adiabat profiles are self-similar in temperature*, i.e. the temperature enters the analytic expression of  $K(\mathbf{r})$  by its normalisation only, then we can derive an expected  $L_X - T$  relation. This assumption is justified by the fact that our theoretical expression for the adiabat normalisation (equation (21), which is computed at the virial radius, provides a very good fit to the central entropy data in groups and clusters. This simple fact ensures that the difference in normalisation between two clusters of different temperature (which is due to shocks and preheating) is leaved approximately unchanged from the virial radius to the center. This important side aspect of our work will be discussed in Sec. 7. We thus write :

$$K(\mathbf{r}, T_2) = K_2(T_2) f(\mathbf{r}), \quad (32)$$

where  $K_2(T_2)$  is given by equation (21) and  $f(\mathbf{r})$  is a function of the radius, that is independent of the mean system temperature. We have thus :

$$\frac{L_X}{T^{3+\alpha}} = \Lambda_0 K_2(T)^{-3} \int_V \frac{dV}{f^3(\mathbf{r})}. \quad (33)$$

Even if  $f$  does not depend on  $T$ , the integral on the right-hand side of the last equation depends on the total volume of the cluster, and thus on its virial radius, which depends also on the mean temperature. Let us assume that the cluster is spherically symmetric (which is reasonable if the system has sufficient time to relax). We can then write :

$$\int_V \frac{dV}{f^3(\mathbf{r})} = 4\pi \int_0^{r_v} r^2 f^{-3}(r) dr \quad (34)$$

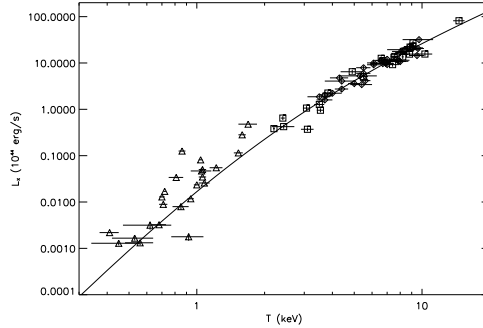
$$= 4\pi r_v^3 \int_0^1 x^2 f^{-3}(x) dx \quad (35)$$

$$\equiv 4\pi r_v^3 Q_X \quad (36)$$

where we set  $x = r/r_v$  and define the shape factor  $Q_X$ . Using then the  $r_v - M$  and  $M - T$  relation of equation (B.10) and (B.11) before using our  $K - T$  relation (21), we obtain when replacing in equation (33) :

$$L_X = L_0 T^{9/2+\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right) \right]^{-3} \quad (37)$$





**Fig. 3.**  $L_X - T$  relation versus observations from Helsdon & Ponman (2000) for groups and Markevitch (1998) and Arnaud & Evrard (1999) for clusters. The solid line is the analytic formula in eq. (37).  $T_0$  was fixed at the value computed in Sec. 2.3.2 *i.e.*,  $T_0 = 2$  keV, and  $Q_X = 0.115$ , as computed in Appendix C.

where the normalisation  $L_0$  is given by :

$$L_0 = \Lambda_0 \left( \frac{3 M_*}{\Delta \rho_c^0 T_*^{3/2}} \right) K_0^{-3} Q_X, \quad (38)$$

Let us first comment on the shape of the  $L_X - T$  relation. While for the group range, where  $\alpha = 0$  and  $T \ll T_0$ , we have :

$$L_X \propto T^{9/2} \propto T^{4.5}, \quad (39)$$

for very hot clusters (for which  $T \gg T_0$  and  $\alpha = 1/2$ ), we recover the so-called self-similar behaviour :

$$L_X \propto T^{9/2+1/2-3} \propto T^2. \quad (40)$$

The 10 keV cluster range will be intermediate between these two behaviours. We now turn to a comparison with observations.

### 3.2. Comparing with $L_X - T$ observations

The normalisation of the local  $L_X - T$  relation (eq. 38) depends on the value of the IGM adiabat  $K_0$  and the shape factor  $Q_X$ . The former has been obtained in Sec. 2.3.3 ( $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ ) by comparing our analytic formula for the adiabat jump to observations. The latter is more difficult to obtain since it will depend on the exact adiabat profile of clusters and groups. We show in Appendix C that we can compute a value for  $Q_X$  by considering a reasonable model for the adiabat profile, relying on isothermality and a  $\beta$ -model for the gas density profile (Cavaliere & Fusco-Femiano, 1976). The computed value is  $Q_X = 0.115$ .

To validate this relation, we plot on figure 3 the  $L_X - T$  relation of equation (37) together with data taken for groups (from Helsdon & Ponman, 2000) and clusters of

galaxies (Markevitch, 1998; Arnaud & Evrard, 1999). The quality of the fit is obviously excellent. Note that we adopt for  $T_0$  the value computed in Sec. 2.3.2 and used  $Q_X = 0.115$ . There is thus no free parameter in the solid curve computation, since  $K_0$  has been already fixed.

Note that the hotter groups seem to be overluminous when compared to the cluster data as well as to the analytic relation. This is due to the fact that, in the cluster observations, the central cooling-flows were cut (Markevitch, 1998) or the sample was chosen explicitly to contain only clusters with known weak cooling-flows (Arnaud & Evrard, 1999). On the contrary, the groups luminosity in Helsdon & Ponman (2000) are not corrected for the cooling-flow (which explains that the hotter groups, which are expected to have the greatest fraction of their luminosity coming from their cooling-flow because of their higher central density, show the greatest departure). Our model does not take into account a possible cooling-flow component, which explains that it fits very well the cluster data, while lying near the lower envelope of the hotter groups. It fits nevertheless very well the lower temperature groups<sup>3</sup>.

Both the cluster slope and the group steeper slope come out naturally of our relation. This agreement is remarkable and is the first to our knowledge *based on an analytic discussion to encompass both groups and clusters*.

This good agreement is a strong sign in favor of the consistency of our approach. It is thus natural to try to apply an analogous method to the correlation between the mass of gas and the mean temperature, as well as to the SZ effect, and compare cluster observations with our analytic predictions. Unfortunately, gas mass observations are sparse and heterogenous for groups, while no SZ effect in a group has yet been observed. We can nevertheless make predictions for the  $M_{ICM} - T$  and  $y - T$  relation in this range, which could be validated by undoubtedly forthcoming SZ measurements.

## 4. From the adiabat to the ICM gas mass and gas fraction

### 4.1. Predicting the $M_{ICM} - T$ relation and comparing to observations

Another tight correlation found in reducing ICM data of clusters is the link between the ICM mass and the mean temperature. For a perfectly self-similar model, one expects theoretically  $M_{ICM} \propto T^{3/2}$ . In fact, several groups have reported recently a steepening of this relation, which could be due to entropy injection. Vikhlinin et al. (1999) have studied the outer regions of a ROSAT sample of clusters, and found that the above correlation could be written  $M_{ICM} \propto T^{1.71 \pm 0.13}$ , steeper but nevertheless close to the self-similar value. On the other hand, Mohr et al. (1999) have fitted double  $\beta$ -models to another large sample of clusters and found that  $M_{ICM} \propto T^{1.98 \pm 0.18}$ , much

<sup>3</sup> For more discussion on this point, see Brighenti & Mathews (2001), Sec. 2.1.

steeper than the self-similar model. It is not clear if this discrepancy (at only  $1\sigma$  level) is real and if so, what are the reasons behind it.

It is easy to compute this correlation in our framework and worth comparing our predictions with observations. The ICM mass of gas can be written (assuming spherical symmetry) :

$$M_{ICM} = 4\pi \int_0^{r_v} r^2 \rho_{gas}(r) dr, \quad (41)$$

where  $\rho_{gas}(r) = \mu m_p n(r)$  is the mass density of plasma. Rescaling with the virial radius and replacing the gas number density by a combination of temperature and adiabat, one finds :

$$M_{ICM} = M_{ICM}^0 T^3 \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2} \quad (42)$$

with

$$M_{ICM}^0 = \mu m_p \left( \frac{3 M_*}{\Delta \rho_c^0 T_*^{3/2}} \right) K_0^{-3/2} Q_M, \quad (43)$$

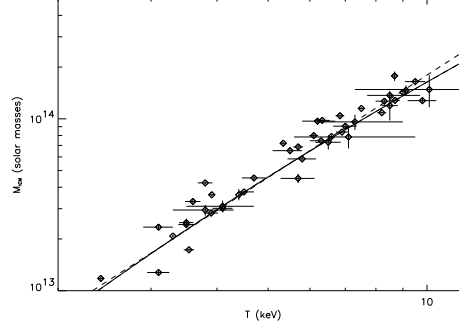
where we defined naturally :

$$Q_M = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{f^{3/2}}. \quad (44)$$

The value of this shape factor, which determines the overall normalisation, is also evaluated in Appendix C. The predicted value using eq. (44) is  $Q_M = 0.1915$ , while the best-fit normalisation is  $\sim 40\%$  lower. We argue in Appendix C that the observed surface brightness in most of the clusters does not reach  $r_{500}$  (the virial radius) and thus needs an risky extrapolation of the data. Moreover, the observational derivation of  $r_\Delta$  is also dependent on several assumptions (in particular on the assumption of a given mass profile) and it is possible that the gas masses were in fact computed at  $\Delta \neq 500$ . Indeed, lowering the the upper boundary of the integral in eq. (44) to 0.8 (*i.e.*, assuming  $r_{500}$  is underestimated by only 20 %) gives  $Q_M = 0.1136$ , which is in perfect agreement with the data. We use this value in figure 4 and in the following section.

The slope of the correlation also steepens from very hot clusters ( $M_{ICM} \propto T^{3/2}$ , analogous to the self-similar correlation) to groups ( $M_{ICM} \propto T^3$ ). The temperature range probed by Mohr et al. (1999) is intermediate between these two behaviours.

The figure 4 shows the data from Mohr et al. (1999), as well as their best-fit linear correlation  $M_{ICM} \propto T^{1.98}$  (dot-dashed line). The solid line is our predicted relation using the computed value  $Q_M = 0.1136$ . The predicted slope matches perfectly the data. The steepening of the relation compared to the self-similar one is thus, in our particular model, simply a consequence of the differential shock strength and the entropy floor.



**Fig. 4.**  $M_{ICM} - T$  correlation. The data are from Mohr et al. (1999). The dot-dashed line is the best-fit linear correlation  $M_{ICM} \propto T^{1.98}$  found by these authors, while the solid line is the predicted correlation (eq. 42) using the computed value  $Q_M = 0.1136$  (see Appendix C). The curvature of our prediction is clearly visible when compared to the best-fit power-law.

#### 4.2. Comparing the subsequent $f_{gas} - T$ relation with observations

The gas fraction is very important in that it is supposed to give a direct lower limit on the universe baryon fraction, if clusters are a fair sample of the universe (White et al., 1993). Such measurements have proven to be tight constraints to the total mass density of the universe.

Using eq. (42) and the observed  $M - T$  relation of eq. (B.11), *i.e.* the observed scaling between total mass and temperature, it is straightforward to compute the gas fraction variation with temperature :

$$f_{gas} = f_{gas}^0 T^{3/2} \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2}. \quad (45)$$

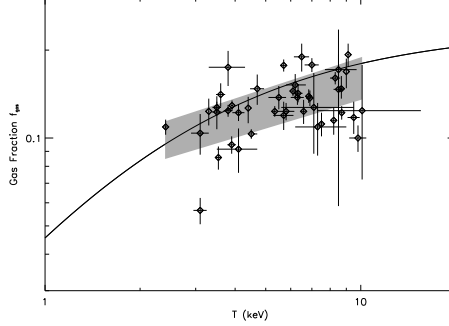
with

$$f_{gas}^0 = \mu m_p \left( \frac{3}{\Delta \rho_c^0} \right) K_0^{-3/2} Q_M. \quad (46)$$

The value of  $Q_M$  is the same as in the last section ( $Q_M = 0.1136$ ) and no renormalisation is performed.

Eq. (45) is shown in figure 5, together with observations. The data points are from Mohr et al. (1999). These data were fitted by the authors with a power-law, namely  $f_{gas} = (0.207 \pm 0.011) (T/6 \text{ keV})^{0.34 \pm 0.22}$ . The shaded area, limited in abscissa by the minimum and maximum temperature of the sample, represents the area covered by similar power-laws increased and decreased by  $1\sigma$  (both in normalisation and in slope). It is obvious that the data are dispersed, but the trend found by Mohr et al. (1999) is very well recovered by eq. (45), as well as the normalisation.

Looking at eq. (45), one sees that for  $T_0 \ll T$ , *i.e.* for rich clusters, the gas fraction becomes independent of the



**Fig. 5.**  $f_{gas} - T$  relation. Data are taken from Mohr et al. (1999) as well as the shaded area which corresponds to the domain of validity of their fitted power law,  $\pm 1\sigma$ . The solid line corresponds to our prediction. Both the trend and the normalisation are in good agreements.

temperature. This regime is only reached asymptotically in the figure. On the other end the slope steepens from clusters to groups, since we have :

$$f_{gas} \propto f_{gas}^0 T_0^{3/2} = \text{constant for rich clusters,} \\ \propto M \quad \text{for groups,} \quad (47)$$

where  $M$  is the total mass of the group. It is interesting to note that the fact that the gas fraction is proportional to the total mass in the groups regime was first claimed by Balogh et al. (1999). We thus recover analytically the adiabatic behaviour modelled by these authors. However, their model breaks down at high temperature, when the shocks become important, while ours runs smoothly from an adiabatic infall to a shock-dominated regime.

## 5. From the adiabat to the SZ temperature decrement

The observations against which our model was validated above were only in the X-ray wavelengths. We are now turning to the radio and sub-millimeter bandwidth, which also probes the hot gas in clusters (via the Sunyaev-Zeldovich effect) and offers independent observations, with different possible systematics and errors. This allows us to independently validate the model and make some predictions about the group behaviour in this band.

Inverse-Compton scattering of incoming CMB photons on ICM thermal electrons cause a well observed change in the spectral dependence of the CMB (Rephaeli, 1995; Birkinshaw, 1999). The amplitude of the CMB temperature brightness variation can be written :

$$\frac{\Delta T}{T_{CMB}} = h(x) \int \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right) n_e \sigma_T dl \equiv h(x) y, \quad (48)$$

where  $h(x)$  is the frequency dependence (with  $x = h\nu/kT_{CMB}$ ), which simplifies to  $h(x) = -2$  at the

Rayleigh-Jeans part of the spectrum,  $y$  being called the comptonization parameter. The integral in the right-hand side of equation (48) can be expressed as a function of  $K$ , as for the X-ray luminosity :

$$\frac{\Delta T}{T_{CMB}} = h(x) y \quad (49)$$

$$= h(x) \frac{k\sigma_T}{m_e c^2} \int n_e T dl \quad (50)$$

$$= h(x) \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int \frac{(kT)^{5/2}}{K^{3/2}} dl \quad (51)$$

### 5.1. An analytic prediction for the $y - T$ relation

For current SZ experiments resolution (especially interferometric ones), the beam smearing is still a critical issue as long as we want to determine a central value. Most authors use X-ray determined temperature as well as the X-ray surface brightness to correct for the beam and to obtain the central value of the SZ effect  $y(0)$ . This might be a source of uncertainty but we will nevertheless express this quantity in our physical framework, and compare it to observations.

The beam-corrected quantity can be obtained in the following way : going back to equation (51) we write (assuming spherical symmetry)

$$y_0 \equiv y(0) \\ = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int \frac{T^{5/2}}{K^{3/2}(T)} dl \quad (52)$$

$$= \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \frac{T^{5/2}}{K_2^{3/2}(T)} \int_R^\infty \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2} f^{3/2}(r)} \\ = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \frac{T^{5/2}}{K_2^{3/2}(T)} R_v \int_0^\infty \frac{dx}{f^{3/2}(x)}. \quad (53)$$

Using eq. (21), (B.10) and (B.11) we have thus :

$$y_0 = \bar{y}_0 T^3 \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_0} \right) \right]^{-3/2} \quad (54)$$

with

$$\bar{y}_0 = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \left[ \frac{3M_*}{4\pi \Delta \rho_c^0 T_*^{3/2}} \right]^{1/3} K_0^{-3/2} Q_{SZ}, \quad (55)$$

where we have defined :

$$Q_{SZ} = \int_0^\infty \frac{dx}{f^{3/2}(x)}. \quad (56)$$

The value of  $Q_{SZ}$  is computed in Appendix C.

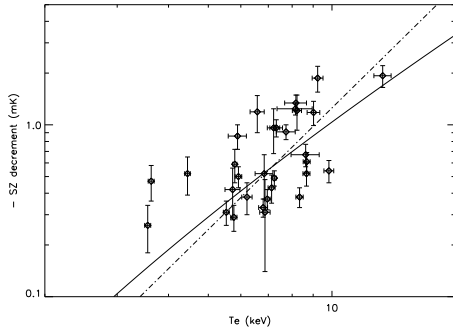
Finally, let us make a comment about the shape of the  $y - T$  relation. For  $T \gg T_0$ , we get :

$$y_0 \propto T^{3-3/2} \propto T^{3/2}, \quad (57)$$

while for  $T \ll T_0$  :

$$y_0 \propto T^3. \quad (58)$$

Thus, as a matter of fact we expect a steepening of the  $y - T$  relation when going from clusters to groups.



**Fig. 6.** Central SZ decrement - X-ray temperature relation. The data points are taken from Zhang & Wu (2000). The solid line is the predicted  $y_0$  using  $Q_{SZ} = 1.835$ . The dot-dashed line corresponds to the renormalised correlation fitted by Cooray (1999). The predicted normalisation was computed using  $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$  and  $T_0 = 2 \text{ keV}$ , i.e., it is *not free* once  $K_0$  has been fitted to the observations (Sec. 2.3.3).

### 5.2. Comparing with $y - T$ observations

Taking observational data from Zhang & Wu (2000) (diamonds), we can compare our predicted relation of equation (54) to observed correlations.

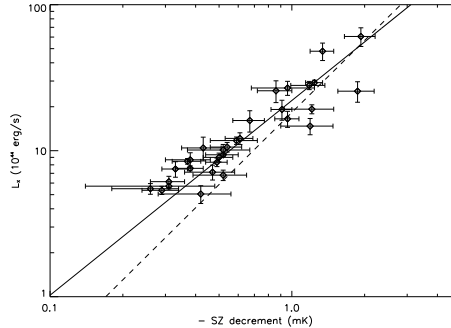
In figure 6 we plot data and their associated error bars, our prediction for  $Q_{SZ} = 1.835$  (solid line, computed in Appendix C) and the best fit of Cooray (1999, dot-dashed line)<sup>4</sup>. The fact that only rich cluster data are yet available (which limits the leverage on the slope) and the large dispersion on the observed  $y$ - $T$  correlation translates into a large uncertainty on the best-fit slope :  $2.35 \pm 0.85$ .

Our prediction for the beam-corrected value is steeper than the Cooray's best-fit relation but still consistent with it at the  $1\sigma$  level. It seems to be in better agreement with Zhang's data set, which extends to slightly higher and lower temperatures than Cooray's. Note that we will further show that equation (54) is also in very good agreement with semi-analytic models for both groups and clusters.

The overall agreement with both data sets is less impressive than for the previously derived  $L_X - T$  relation, but is still very reasonable, given the observational dispersion.

Since X-ray and SZ observations are completely independent, the agreement between our analytic model with the latter is another independent confirmation of its validity. A robust confirmation would come from SZ observations of groups of galaxies (unfortunately not yet feasible) and from the change in the correlation slopes.

<sup>4</sup> Note that in Cooray (1999)'s paper, the quoted normalisation of the best-fit  $y - T$  relation is wrong by a factor of 10.



**Fig. 7.** Central SZ decrement - X-ray luminosity relation. The solid line represents the analytic predicted correlation, using the predicted values of  $Q_{SZ}$  and  $Q_X$  found in Appendix C. The dashed line corresponds to Cooray (1999)'s best-fit correlation. The data are taken from Zhang & Wu (2000).

Nevertheless, we can compare our simple model to more elaborate semi-analytic models and their predictions.

Menci & Cavaliere (2001) have presented semi-analytic predictions for the observed SZ effect in groups and clusters. Their semi-analytic model takes into account the preheating due to star formation, in order to bend the  $L_X - T$  relation in the groups mass range. Our predictions for the  $y(0) - T$  relation (namely equation (57) for clusters and (58) for groups) are in complete accord with their preheated models. They found a self-similar relation for high mass systems ( $y \propto T^{3/2}$ ) which is exactly our prediction. The slope in the groups mass range depends on the feedback model they chose, but our prediction ( $y(0) \propto T^3$ ) is also similar to their computed moderate feedback model (which looks to be a better choice, since their strong feedback model is likely to give only an upper limit on the feedback effect). We are thus able to reproduce their figures 3 and 4 with our simple analytic model. Even if this is not a confirmation of the model (since we use an analytic version of their model of shocks and our hypothesis on the preheating are very similar), we find it extremely satisfying to reproduce *analytically*, and in a physically straightforward and motivated way, the results of a more complicated and non-analytic model. This gives us more confidence in the fact, that we have captured in this simple physical scheme the essential ingredients of the clusters and groups formation.

## 6. Linking SZ and X-ray measurements

To link SZ and X-ray measurements, it is natural to determine a correlation between  $y$  and  $L_X$ . It is expected to be much tighter than the  $y$ - $T$  relation (see Cooray, 1999), but is more intricate to obtain analytically. In this section, we will give two analytic expressions for this correlation in the rich clusters's and in the groups' range mass respectively.

Indeed using equations (54) and (37), we can write :

$$\frac{L_X}{y_0^2} = \frac{L_X^0}{y_0} T^{\alpha-3/2}. \quad (59)$$

To proceed further we need now to “invert” equation (54) but this can not be easily done without a new hypothesis. Since the SZ observations span only the range of clusters yet, as long as we want to compare to observations it is satisfying to assume that  $T \gg T_0$ . We can then write :

$$T = T_0^{-3/2} \left( \frac{y_0}{y_0} \right)^{2/3}, \quad (60)$$

and inserting this in equation (59) gives :

$$L_X = L_X^0 T_0^{3/2} \left( \frac{y_0}{y_0} \right)^{1+\frac{2}{3}\alpha} \quad (61)$$

$$= L_X^0 T_0^{3/2} \left( \frac{y_0}{y_0} \right)^{4/3} \quad \text{with } \alpha = 1/2. \quad (62)$$

The observed correlation between  $y$  and  $L_X$ , together with the analytic prediction (equation (62), solid line) is shown in figure 7. The data are taken from Zhang & Wu (2000) and the dashed line is the best-fit relation found by Cooray (1999). The normalisation has been computed using  $K_0 = 102 \text{ keVcm}^2$ ,  $T_0 = 2 \text{ keV}$ ,  $Q_X = 0.115$  and  $Q_{SZ} = 1.835$ . The agreement is very good, even if it must be recalled that the shown correlation has been computed for the case  $T \gg T_0$ . Thus the real correlation will be slightly steeper (thus more in agreement with Cooray’s correlation), but by a very small amount, well within the observational dispersion.

Finally, one can compute this correlation in the groups mass range ( $T \ll T_0$ ), yielding a steeper correlation :

$$L_X = L_X^0 \left( \frac{y_0}{y_0} \right)^{3/2} \quad \text{with } \alpha = 0. \quad (63)$$

## 7. Discussion

We have shown that a simple modeling of the main process in charge of the formation of clusters (namely the shocks which thermalise the gas inside the virial radius) allows to derive a general  $K - T$  relation that reproduces very well the observed one. Moreover, we were able to deduce most of the observed scaling laws with the adequate normalisation, encompassing both groups and clusters. Thus, the physical meaning of *e.g.* the  $L_X - T$  and  $y - T$  relations, and in particular of the break in their self-similarity when going from clusters to groups (only evidenced in X-rays for the moment) can be understood as a relic of the formation process of these systems : a competition between an entropy floor prior to the shock and the shock process itself. This suggests naturally that entropy constitutes the best “observable” in clusters, as already emphasized by the modified spherical model of Tozzi & Norman (2001). What we add here is that we show that entropy (in fact, the adiabat) is also suitable to seek analytic expressions for the different correlations found observationally in

groups and clusters. Reversing this argument, these scaling laws should be an appropriate probe of the entropy content of clusters.

### 7.1. The $L_X - T$ relation as a probe of entropy content

While the entropy spatial variations of the baryonic gas in clusters is a valuable piece of information on their present thermodynamic state (in particular for merging clusters, see *e.g.*, Markevitch et al., 1999), the total entropy content  $\bar{K}$  (hereafter TEC), defined as

$$\bar{K} = \int_V K(\mathbf{r}) dV \quad (64)$$

is related to the integrated thermodynamic history of the formation of these systems. Therefore, any non-gravitational entropy injection at some point in this history will enhance the entropy content over the shock-generated one, while the cooling should decrease it in the central parts.

The analytic model we have presented in the last sections allows us to shed some light in the TEC and its link to the  $L_X - T$  relation. On the one hand, given our assumption of isothermality, eq. (31) indicates that  $L_X/T^{3+\alpha}$  is related to the TEC in a given system. On the other hand, the self-similar models of cluster formation (Kaiser, 1986) predict that  $L_X \propto T^2$ , which gives directly (using  $\alpha = 1/2$ ) :

$$\frac{L_X}{T^{7/2}} \propto T^{-3/2}. \quad (65)$$

Any departure from this last relation witnesses entropy injection or loss. Consequently, at a given temperature, the gap between the curve representing eq. (65) and the locus of observed groups and clusters will give a indirect measure of entropy gain at a given mass (if the central cooling parts are adequately excised). Unlike the observations of the “entropy floor”, which were obtained at a single scaled radius near the center (Ponman et al., 1999; Lloyd-Davies et al., 2000) and so are representative of a particular point in the entropic history (*i.e.*, at a time near the last major merger), *this measure includes most of the volume of the systems and thus most of its past thermodynamic history.* However, this does not directly measure  $\bar{K}$ , but the integral of a power-law of the TEC. We will first show that in a semi-analytic scheme (with less assumptions than the present analytic model as well as with a realistic entropy evolution of the intergalactic medium) the interpretation of the  $L_X - T$  relation is still valid and then discuss how X-ray and SZ observations can constraint the TEC.

### 7.2. Relaxing some hypotheses

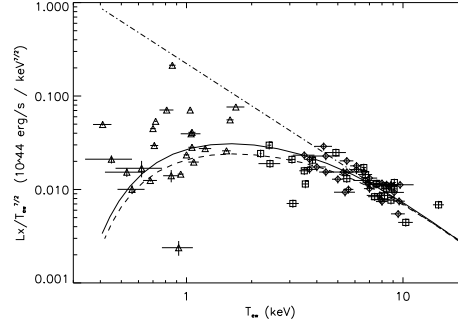
Assuming local thermodynamic equilibrium, isothermality, and the self-similarity of the adiabat profile, we illustrated how the observed  $L_X - T$  relation is a probe of the TEC. Whereas the LTE is quite robust (and actually very

difficult in practice to alleviate), neither the isothermality nor the self-similarity are fully exact from both an observational and a theoretical point of view. In particular, this last assumption is a very strong one and will be discussed in depth in section 7.3. It is thus worth relaxing these hypotheses and testing the validity of our work by considering how well the quantity  $\int_V K^{-3} dV$  probes  $L_X/T^{7/2}$ , *i.e.* testing eq. (31) when we consider a full non-isothermal and non-self-similar profile.

To this purpose, we will use a semi-analytic model (hereafter SAM) developed independently by one of us (Dos Santos 2001, in preparation). This particular model uses the conduction-structured temperature profile (which was shown by Dos Santos (2001) to describe very well the temperature and surface brightness profile of clusters of galaxies), together with an NFW profile for the dark matter density profile. A shock model at the virial radius, together with entropic constraints at the center allow to predict the temperature profile without the hypothesis of isothermality or the unphysical polytropic link between temperature and density. The evolution of the central entropy is governed by the entropy evolution of the IGM in the universe obtained from the model of Valageas & Silk (1999) in two different cases : in the first one, the reheating is provided by SN explosions only, while in the second one, AGN and quasar activity provide the entropy injection. Both cases were validated against a number of observations, including the  $L_X - T$  relation, the change in surface brightness profiles from clusters to groups, the baryon fraction in these systems and the entropy floor.

Figure 8 shows the comparison between observations and the SAM. The solid (SN case) and dashed lines (QSO case) show the quantity  $\int_V K^{-3} dV$  computed directly using the model. Since the specific entropy is known up to an additive constant, both lines were normalised to match the high temperature clusters. The dot-dashed line shows the self-similar prediction for  $L_X/T^{7/2}$  (eq. 65), also renormalised to match rich clusters. The preheated models high temperature slopes match naturally the self-similar prediction. They also match very well the cluster data and their trend in temperature. It is in particular remarkable that the three clusters with the smallest temperatures ( $T \sim 2$  keV) depart notably from the self-similar prediction, and lie exactly on top of the semi-analytic prediction. The lower envelope of groups is well followed by the SAM, while some points are over this prediction. We think that, as in Sec. 3.2, this is due partly to the fact that the central cooling regions of groups were not removed, unlike the clusters, and partly to an intrinsic scatter.

The figure shows why our simple model works well in recovering slope and normalisation of the  $L_X - T$  relation (and of the other relations we studied) : the equality (31) is also verified in a more general semi-analytic model where the adiabat profile is fully known and the ICM is not isothermal. At a given temperature, the difference in location between observations and the self-similar curve will give a measure of the non-gravitational entropy injection in systems with this mean temperature. *This measure does*



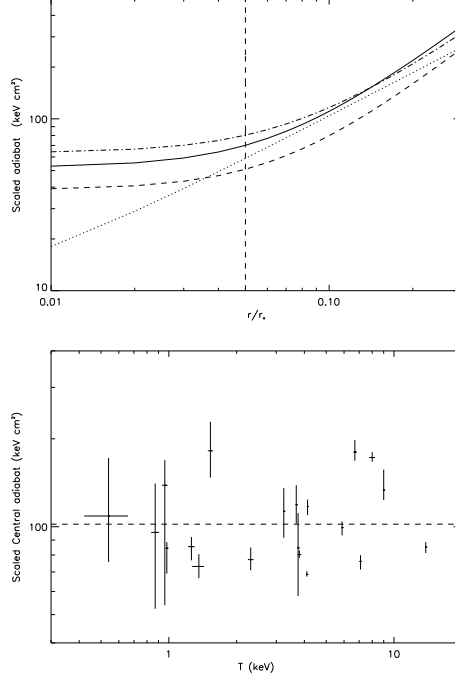
**Fig. 8.**  $L_X/T^{7/2}$  (observational points) compared to the direct computation of  $\int_V K^{-3}(\mathbf{r}) dV$  in the SAM. The data are the same as in the figure 3. The solid (respectively, dashed) line is the result of the SAM in the case of SN (respectively, QSO) reheating. The dot-dashed line is the self-similar prediction ( $L_X/T^{7/2} \propto T^{-3/2}$ ). Thus, relaxing the assumptions of isothermality and self-similarity of our analytic model does not change the interpretation of  $L_X/T^{7/2}$  as a probe of  $\int_V K^{-3}(\mathbf{r}) dV$ . This explains that our simple model is able to recover the slope and the normalisation of the  $L_X - T$  relation.

*not depend at all on hydrostatic equilibrium or spherical symmetry. Nor does it require either that the preheating was external.* In fact, eq. (33) is completely independent of any modeling of the entropy injection. It only requires isothermality and local thermodynamic equilibrium on the scales probed by the observations. It thus can be used as a powerful, model-independent, constraint on all the internal or external preheating models, as well as on differential galaxy formation efficiency between groups and clusters (Bryan, 2000). Unfortunately, the TEC is not measured directly, but the integral of the right-hand side of eq. (31) will obviously decrease as the entropy injection amount is increased. Thus, if the adiabat profile is known in a given model, it will be easy to relate this integral to the TEC, even if a certain amount of degeneracy will obviously be present (this measure being integrated in space and time, different entropy injection histories can lead to the same final amount of entropy at  $z = 0$ ).

In fact, this constraint will be more or less the same as the constraint given by the  $L_X - T$  relation (already used to constrain the models), even if the interpretation in terms of entropy is physically more satisfying. However, the same remarks can be made with the surface integrated SZ decrement. Indeed, the SZ y-Compton parameter integrated over the whole surface of a cluster can be written :

$$\frac{y}{T^{5/2}} = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int_V \frac{dV}{K^{3/2}(\mathbf{r})}, \quad (66)$$

which shows that the quantity  $y/T^{5/2}$  is also a probe of the entropy content, but with a different power of the adiabat profile inside the integral. Thus, once SZ observations for



**Fig. 9.** *Upper panel* : Average scaled adiabat profiles for systems grouped by mean temperature (solid : 6-14 keV; dashed : 3.7-6 keV; dot-dashed : 1.3-3.7 keV; dotted : 0.5-1.3 keV). Each individual profile was obtained from the best-fit gas and density profiles given by Lloyd-Davies et al. (2000) and scaled by  $[1 + T/T_0]/(1+z)$ . No trend is found with the temperature (unlike with the scaling used by Lloyd-Davies et al., 2000) and all the profiles are approximately self-similar. The vertical dashed line shows the mean cooling-flow radius. *Bottom panel* : Scaled central entropy value as a function of the mean temperature of each system. Again, no excess in groups is found, which validates our assumption of self-similar adiabat profiles (at least in the core) and our approach. The dashed line shows the entropy floor value inferred from the data ( $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ , corresponding to  $K_1 = 120 \text{ keV cm}^2$ ).

groups are available, even non-resolved, the combination of X-rays and SZ at a given temperature will be a powerful constraint on cluster formation models. Note that the relation  $M_{ICM} - T$  gives an analogous relation as eq. (66), and can thus be used now as an entropy probe.

### 7.3. The adiabat profiles and the self-similarity

To derive the analytic scaling relations presented in this paper, we have used a strong assumption : the self-similarity of rescaled adiabat profiles (see eq. 32) *i.e.*, the

fact that the temperature enters only the normalisation of the adiabat profile. The validity of this assumption is questionable, both on observational and theoretical grounds.

Ponman et al. (1999) show that density profiles are shallower in groups than in clusters (even if this result is still uncertain, see Roussel et al., 2000, for an alternative view), while preheating models predict naturally that entropy gradients in lower temperature systems are smaller than in clusters (due to adiabatic infall during their lifetime, see Balogh et al., 1999; Tozzi & Norman, 2001). However, these models predict also large temperature gradients in groups which are not observed (Tozzi & Norman, 2001). Moreover, using 1D hydrodynamic models with internal or external preheating, Brighenti & Mathews (2001) obtain linearly rising entropy profiles in groups (outside an isentropic core for external preheating models) as well as in clusters. They thus produce naturally self-similar adiabat profiles in groups and clusters. The reasons of such discrepancies are unclear, but are certainly linked with widely differing simulation methods. Note however that Knight & Ponman (1997), using similar 1D hydrodynamic simulations, have found shallower slopes in groups compared to clusters, *without taking into account any preheating* (whose effect is expected to widen the slope difference).

Spatially-resolved spectroscopic observations of groups and clusters provide directly adiabat profiles in groups and clusters and can then help to settle this debate. Unfortunately, the low surface-brightness of groups allows this type of study only to small radii<sup>5</sup>. Indeed, Lloyd-Davies et al. (2000) obtained the adiabat profile for 12 systems with  $T < 4 \text{ keV}$  up to  $r = 0.25 \times r_g$ . Even if this maximum extent radius is small, the study of the adiabat profiles behaviour with temperature inside it is still worth, since the X-ray luminosity comes mainly from this central part of the cluster (due to the  $n^2$  scaling of  $L_X$ ). These authors have rescaled their observed entropy profiles by a factor  $T^{-1}(1+z)$ , removing the effect of system mass and of the evolution of the mean density of the universe. They found that the scaled adiabat profiles do not coincide, the less massive systems having higher scaled entropy profiles (see their figure 4). However, this particular scaling does not take into account the physical processes that change the adiabat normalisation with mass. What we have shown in this paper is that the adiabat profiles of groups and clusters should be rescaled (*i.e.*, divided) by the quantity :

$$\left[1 + \frac{T}{T_0}\right] (1+z)^{-1}, \quad (67)$$

where the  $(1+z)^{-1}$  factor comes from the redshift dependence of the temperature ( $T \propto (1+z)$ ) and the red-

<sup>5</sup> Note that this situation will be much improved with groups observations with XMM-Newton, due to its enhanced sensitivity.

shift dependence of the central density (proportional to the mean density of the universe *i.e.*,  $\propto (1+z)^3$ )<sup>6</sup>.

Using the best-fit  $\beta$ -model for the gas density and the best-fit linear ramp for the temperature profile, we reproduced their adiabat profiles, and rescaled them individually by the quantity in eq. (67). Then we grouped the systems by temperature and computed the mean scaled profile, as in Lloyd-Davies et al. (2000). The scaled profiles are displayed in the upper panel of figure 7.3 (we used the same line styles as Lloyd-Davies et al., 2000). No trend with temperature is visible now and the slight dispersion can be attributed to the assumption that the observation time equals the formation time of a system. Moreover, the four profiles are very similar between  $r = 0.05 \times r_v$  (the mean cooling-flow radius, inside which entropy loss is achieved by cooling) and the outer radius. This means that our assumption of scaled self-similar adiabat profiles is indeed right, at least in the core of the systems. To confirm this, one can do the same scaling with the central adiabat values (at  $r = 0.1 \times r_v$ ), which is shown in the bottom panel of figure 7.3. Instead of finding an excess for  $T < 4$  keV as in the figure 5 of Lloyd-Davies et al. (2000), we find now that all the systems lie on the same central adiabat symbolised by the dashed line and giving directly the value of  $K_0$  in our model (*i.e.*,  $K_0 = 102$  keV cm<sup>2</sup>).

This shows that, *when rescaled conveniently, the central adiabat profiles of groups and clusters are indeed self-similar* and thus that our assumption is valid, as well as our whole approach of taking into account not only hydrodynamic shocks but also an entropy floor established before them. This explains why our slope and normalisation work so well for the  $L_X - T$  and  $y_0 - T$  relations, which put more weight on the core of the systems. It also enlightens the fact that our shape factor for the gas mass is less accurate, since most of the mass lies at large radius where the self-similarity assumption breaks down (see Appendix C).

#### 7.4. Comparison with other results

We have compared most of our analytic results with predictions from semi-analytic models and found good agreement (in particular for the trends of the gas fraction with total mass and the SZ effect with temperature in low temperature systems). Let us now compare the value of the entropy floor we need to reproduce the curvature of the  $L_X - T$  relation with values assumed in other theoretical models of energy injection. Balogh et al. (1999) assume a constant entropy injection value of  $\sim 350$  keV cm<sup>2</sup> and Tozzi & Norman (2001)'s model needs a value in the range  $190 - 960$  keV cm<sup>2</sup> in order to steepen  $L_X - T$ . These values, as noted by Lloyd-Davies et al. (2000), are higher than the observed value, which are likely to be upper limits. On the other hand, our model needs a value of  $K_0 = 102$  keV cm<sup>2</sup>, well within the observational range of  $70 - 140 h_{50}^{-1}$  keV cm<sup>2</sup>.

<sup>6</sup> Lloyd-Davies et al (2000) do not take into account the temperature redshift dependence since they divide by  $T$ .

As we have indeed fitted this value to the observations, it may be asked if we do not force in fact this agreement. The answer is clearly no, as, first, the agreement of the  $K - T$  relation with the observations does not guarantee that the same value of  $K_0$  will provide the a good description of the other relations (both their shape, via the temperature at which the self-similarity is broken,  $T_0$ , and their normalisation) which range from radio to X-ray data. Second, the other models reproduce as well the  $K - T$  relation, together with the  $L_X - T$  one (at least Tozzi & Norman, 2001, 's model is compared to these observations) *with the same high value of the entropy floor*. A lower value compatible with observations would not fit this relation.

The main difference between our present work and these models is the fact that their low temperature systems are entirely isentropic *i.e.*, no shocks occur at all in groups. This is the claimed approximation made by Balogh et al. (1999), who want to investigate a limiting model (which naturally fails also in the clusters' mass range). However, Tozzi & Norman (2001) modelise shocks and adiabatic infall, and it is not clear why shocks do not raise the adiabat profiles of their groups.

This clearly shows that *shocks can not be completely suppressed in groups* unless an unacceptably high entropy floor is needed in order to break the self-similarity in the  $L_X - T$  relation. Our model takes shocks and the entropy floor into account by construction both in clusters and groups and is thus able to reproduce nicely all the X-ray correlations with the observed value of  $K_0$ .

## 8. Conclusion

Throughout this paper, we have shown that the adiabat constituted a "key observable" in the ICM, not only because it is a record of the thermodynamic past history of diffuse baryons in groups and clusters, but also because it allowed us to derive for the first time *unifying analytic expression for the slope and normalisation of observed correlations of groups and clusters* in X-rays and SZ. We have thus derived analytic expressions and their normalisation for the  $L_X - T$ ,  $M_{ICM} - T$ ,  $f_{gas} - T$ ,  $y_0 - T$  and  $y_0 - L_X$  correlations (for the latter, two limiting expressions have been provided in the case of groups and of clusters respectively). The Appendix A summarizes these correlations and gives the corresponding numerical values of their normalisations. We will conclude by discussing some applications of the model.

Clusters of galaxies, and in particular their baryonic content observed through its X-ray emission, have often been used to provide cosmological constraints (Perrenod, 1980; Kaiser, 1986; Oukbir et al., 1997; Blanchard et al., 2000, and references therein). These studies have shown that the cluster population can provide tight constraints, but have also revealed two problems (apart from purely statistical problems due to large error bars of *e.g.*, the temperature in high-redshift clusters): first, the difficulty to model the luminosity in a cluster, mostly due to the fact



that it depends on the core properties, whose formation is still uncertain. Second, the small available number of rich clusters, in particular at high redshift, which precludes yet a reliable use of these tests<sup>7</sup>.

We think that the present work, together with the new generation of X-ray observatories, can alleviate both of these problems. First, our modelisation of the cluster luminosity does rely on the physical processes being at work during the formation of a cluster, and not on an hypothetical density profile. Therefore, the luminosity does not depend on an arbitrary core radius and is thus more reliable than previous attempts (in particular, we don't have to assume anything on the core radius evolution like *e.g.*, Romer et al., 2001). Second, we extend the analytic relations to the groups mass scale, taking into account the competition between an external entropy floor and hydrodynamic shocks (thus recovering the curvature of the  $L_X - T$  relation) and make predictions for other properties of groups. This is useful since the group population is thought, in a hierarchical structure formation cosmology, to be much larger than rich clusters. However, its redshift evolution has never been used to constrain cosmology, partly because of the lack of reliable data and partly because no analytic modeling of the groups baryonic properties was available (extrapolating the cluster baryonic properties was obviously wrong, as the recent observations show). The first problem will be solved, at least locally, by Chandra and especially XMM-Newton. Our model provides an attempt to solve the second problem. Of course, groups will certainly be much more dispersed than clusters (because the entropy injection will have more effect on them, and any spatial variation of this injection level will affect the properties of a given group), but the number of groups detected will be large : Romer et al. (2001) have estimated that more than 100 clusters with  $T > 2$  keV will be detected in a serendipitous survey for  $z < 0.2$  (irrespective of the cosmology), a number 10 times higher than for cluster with  $T > 4$  keV and 50 times higher than for  $T > 6$  keV for a survey surface of  $\sim 800$  deg<sup>2</sup>. The number of groups with  $T < 2$  keV will obviously be superior, certainly not by a factor 10 because of the reduced size and steepening of the  $L_X - T$  relation, but at least by a factor of a few. This number of well observed groups (together with pointed observations) will allow an unprecedented local calibration of the group ensemble properties. Using our model, it will be possible to use groups and clusters to constrain cosmology and the cluster LF, TF and  $L_X - T$  evolution to add further constraints. Moreover, groups will provide useful constraints on the total amount of reheating the present universe underwent and its redshift evolution if high redshift groups are available (see Sec. 7).

*Acknowledgements.* We are deeply grateful to Romain Teyssier whose critical reading improved significantly the quality of an

<sup>7</sup> It is paradoxical but amusing to note that this same small number of high redshift clusters becomes a powerful test of the total density of the universe (Donahue et al., 1998).

earlier draft of this paper. S. Dos Santos acknowledges also very enlightening discussions with G. C. Stewart. Useful comments from F. R. Bouchet and Y. Mellier are also gratefully acknowledged.

## References

- Arnaud, M. & Evrard, A. E. 1999, MNRAS , 305, 631  
 Balogh, M. L., Babul, A., & Patton, D. R. 1999, MNRAS , 307, 463  
 Balogh, M. L., Pearce, F. R., Bower, R. G., & Kay, S. T. 2001, MNRAS , accepted, astro-ph/0104041  
 Bertschinger, E. 1985, ApJS , 58, 39  
 Birkinshaw, M. 1999, Phys.Rept., 310, 97  
 Blanchard, A., Sadat, R., Bartlett, J. G., & Le Dour, M. 2000, A&A , 362, 809  
 Blanchard, A., Valls-Gabaud, D., & Mamon, G. A. 1992, A&A , 264, 365  
 Bower, R. G. 1997, MNRAS , 288, 355  
 Bower, R. G., Benson, A. J., Lacey, C. G., Baugh, C. M., Cole, S., & Frenk, C. S. 2000, MNRAS , accepted, astro-ph/0006109  
 Brighenti, F. & Mathews, W. G. 2001, ApJ , 553, 103  
 Bryan, G. L. 2000, ApJ , 544, L1  
 Cavaliere, A. & Fusco-Femiano, R. 1976, A&A , 49, 137  
 Cavaliere, A., Menci, N., & Tozzi, P. 1997, ApJ , 484, L21  
 —. 1998, ApJ , 501, 493+  
 —. 1999, MNRAS , 308, 599  
 Cooray, A. R. 1999, MNRAS , 307, 841  
 David, L. P., Jones, C., & Forman, W. 1996, ApJ , 473, 692+  
 Donahue, M., Voit, G. M., Gioia, I., Lupino, G., Hughes, J. P., & Stocke, J. T. 1998, ApJ , 502, 550+  
 Dos Santos, S. 2001, MNRAS , 323, 930  
 Eke, V. R., Navarro, J. F., & Frenk, C. S. 1998, ApJ , 503, 569+  
 Evrard, A. E. 1990, ApJ , 363, 349  
 Evrard, A. E. & Henry, J. P. 1991, ApJ , 383, 95  
 Evrard, A. E., Metzler, C. A., & Navarro, J. F. 1996, ApJ , 469, 494+  
 Finoguenov, A. & Ponman, T. J. 1999, MNRAS , 305, 325  
 Frenk, C. S., White, S. D. M., Bode, P., Bond, J. R., Bryan, G. L., Cen, R., Couchman, H. M. P., Evrard, A. E., Gnedin, N., Jenkins, A., Khokhlov, A. M., Klypin, A., Navarro, J. F., Norman, M. L., Ostriker, J. P., Owen, J. M., Pearce, F. R., Pen, U. ., Steinmetz, M., Thomas, P. A., Villumsen, J. V., Wadsley, J. W., Warren, M. S., Xu, G., & Yepes, G. 1999, ApJ , 525, 554  
 Helsdon, S. F. & Ponman, T. J. 2000, MNRAS , 315, 356  
 Kaiser, N. 1986, MNRAS , 222, 323  
 —. 1991, ApJ , 383, 104  
 Knight, P. A. & Ponman, T. J. 1997, MNRAS , 289, 955  
 Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1959, Fluid mechanics (Course of theoretical physics, Oxford: Pergamon Press, 1959)  
 Lloyd-Davies, E. J., Ponman, T. J., & Cannon, D. B. 2000, MNRAS , 315, 689

Loewenstein, M. 2000, ApJ , 532, 17  
 Lokas, E. L. & Mamon, G. A. 2001, MNRAS , 321, 155  
 Markevitch, M. 1998, ApJ , 504, 27+  
 Markevitch, M., Forman, W. R., Sarazin, C. L., & Vikhlinin, A. 1998, ApJ , 503, 77+  
 Markevitch, M., Sarazin, C. L., & Vikhlinin, A. 1999, ApJ , 521, 526  
 Miniati, F., Ryu, D., Kang, H., Jones, T. W., Cen, R., & Ostriker, J. P. 2000, ApJ , 542, 608  
 Mohr, J. J., Mathiesen, B., & Evrard, A. E. 1999, ApJ , 517, 627  
 Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1997, ApJ , 490, 493+  
 Nevalainen, J., Markevitch, M., & Forman, W. 2000, ApJ , 532, 694  
 Olive, K. A., Steigman, G., & Walker, T. P. 2000, Phys. Rep. , 333, 389  
 Oukbir, J., Bartlett, J. G., & Blanchard, A. 1997, A&A , 320, 365  
 Perrenod, S. C. 1980, ApJ , 236, 373  
 Ponman, T. J., Cannon, D. B., & Navarro, J. F. 1999, Nature , 397, 135  
 Rephaeli, Y. 1995, ARA&A , 33, 541  
 Romer, A. K., Viana, P. T. P., Liddle, A. R., & Mann, R. G. 2001, ApJ , 547, 594  
 Roussel, H., Sadat, R., & Blanchard, A. 2000, A&A , 361, 429  
 Ryu, D. & Kang, H. 1997, MNRAS , 284, 416  
 Sarazin, C. L. 1988, X-ray emission from clusters of galaxies (Cambridge Astrophysics Series, Cambridge: Cambridge University Press)  
 Teyssier, R. 2001, submitted to A&A  
 Teyssier, R., Chièze, R., & Alimi, J. 1997, ApJ , 480, 36  
 Thomas, P. A. & Couchman, H. M. P. 1992, MNRAS , 257, 11  
 Tozzi, P. & Norman, C. 2001, ApJ , 546, 63  
 Tozzi, P., Scharf, C., & Norman, C. 2000, ApJ , 542, 106  
 Valageas, P. & Schaeffer, R. 2000, A&A , 359, 821  
 Valageas, P. & Silk, J. 1999, A&A , 350, 725  
 Vikhlinin, A., Forman, W., & Jones, C. 1999, ApJ , 525, 47  
 White, S. D. M., Navarro, J. F., Evrard, A. E., & Frenk, C. S. 1993, Nature , 366, 429+  
 Wu, K. K. S., Fabian, A. C., & Nulsen, P. E. J. 2000, MNRAS , 318, 889  
 Zhang, T. & Wu, X. 2000, ApJ , 545, 141

$h_{2/3} = 2/3$ . We included the dependence on  $h_{2/3}$  in each of the following expressions<sup>8</sup>.

We first describe one relation (external to the model and independent from it), the  $M - T$  relation, that we used to relate the virial radius to the temperature. Then, we write the different correlations presented in this work, namely  $L_X - T$ ,  $M_{ICM} - T$ ,  $f_{gas} - T$ ,  $y_0 - T$  and  $y_0 - L_X$ .

#### A.1. The Mass-Temperature relation

This relation is crucial, in that it allows us to relate the virial radius (where the shock is assumed to take place) with the temperature of the system, via the definition of  $M$  in terms of  $r_v$ . The simulation results of (Evrard et al., 1996) are frequently used for mass-temperature scaling, but they seem to provide systematically a higher normalisation than the observed one, whatever the method used to measure  $M$  (Nevalainen et al., 2000, and references therein). We used the observational results of Nevalainen et al. (2000), derived from observed density and temperature profile, because their sample, although small, goes all the way from groups to clusters. These authors give the  $M - T$  relation at different scaled radii, from  $r_{2000}$  to  $r_{500}$  (where  $r_\Delta$  is the radius whose mean interior density is  $\Delta$  times the critical density). Since Evrard et al. (1996) have shown that, inside a radius  $r_{500}$ , the baryonic gas is in hydrostatic equilibrium to a very good approximation and that hydrostatic masses measured within this radius should be reliable, we choose this radius to normalise the  $M - T$  relation. Moreover, while at smaller radius Nevalainen et al. (2000) find that the  $M - T$  relation is significantly steeper (99.99 % confidence at  $r_{1000}$ ) than the self-similar prediction ( $M \propto T^{3/2}$ ), the slope they extrapolate to  $r_{500}$  is consistent with  $3/2$  ( $\chi^2/\nu = 5.1/5$ , but note that the best fit has a slope of 1.84). We thus used throughout the paper the following relation :

$$M_{500} = M_* \left( \frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \\ = 9.6 \times 10^{14} M_\odot h_{2/3}^{-1} \left( \frac{T}{10 \text{ keV}} \right)^{3/2}, \quad (\text{A.1})$$

which defines the values  $M_*$  and  $T_*$  used in the text. Each time we speak about the virial radius in this paper, we refer to the radius  $r_{500}$  related to  $M_{500}$  defined above, and we will thus take  $\Delta = 500$  throughout.

Finally, let us state that introducing a steeper slope for the  $M - T$  relation is straightforward within the physical scheme we used in this work, but does not change much the predicted relations gathered in this appendix and their agreement with observations. Since we wanted to discuss the generic effect of shocks and preheating, the same effects which are thought to steepen the  $M - T$  relation, we found natural to keep a self-similar scaling.

<sup>8</sup> We thus have  $h_{50} = 4/3$  and  $h_{100} = 2/3$  where  $h_{50} = (H_0/50)$  and  $h_{100} = (H_0/100)$ .

#### Appendix A: Numerical values for the correlations

In the following appendix, we provide numerical expressions for the normalisations of the different correlations the present model predicts. These will thus be straightforward to use in another context. The temperature  $T$  is in keV, and the normalisations were computed using a local Hubble constant of  $H_0 = 100 h_{2/3} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  with

### A.2. The predicted X-SZ-T correlations

We now compute the different normalisations given in eq. (38), (43), (46), (55) and (62). For this purpose, we will use the values of  $M_*$ ,  $T_*$  and  $\Delta$  from the last section. The critical density is defined as usual as :

$$\rho_c^0 = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G}, \quad (\text{A.2})$$

and, for the luminosity, we will need the normalisation of the cooling function, taken from Eke et al. (1998) :

$$\begin{aligned} \Lambda_e(T) &= \Lambda_0 T^{1/2} \\ &= 1.2 \times 10^{-24} T^{1/2} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

where  $T$  is in keV.

Finally, we take for  $T_0$  the value computed from  $\bar{K}_0$  in the Sec. 2.3.2 *i.e.*,  $T_0 = 2 \text{ keV}$  and the values of the shape factors  $Q_X$ ,  $Q_{SZ}$  and  $Q_M$  computed in Appendix C. *Therefore, the only adjusted quantity used to produce these relations is  $K_0$ , which was fitted to the data of Helsdon & Ponman (2000) in Sec. 2.3.3 to find  $K_0 = 102 \text{ keV cm}^2$ . Once this quantity was fixed by comparison with the central entropy observations, no renormalisation of the following relations is allowed.*

All the numbers are computed here at  $z = 0$ , but it is easy, within a given cosmology, to extend the formulae in the text to higher redshift (note that the value of  $K_0(z)$  must be assumed as well). The analytic correlations found are then

- **$L_X - T$  relation :**

$$L_X = 5.643 \times 10^{42} T^5 \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3} h_{2/3}^{-2} \text{ erg s}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

- **$M_{ICM} - T$  relation :**

$$M_{ICM} = 2.405 \times 10^{12} T^3 \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2} h_{2/3}^{-2} M_\odot \quad (\text{A.5})$$

- **$f_{\text{gas}} - T$  relation :**

$$f_{\text{gas}} = 0.0792 T^{3/2} \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2} h_{2/3}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

- **$y_0 - T$  relation :**

$$y_0 = 3.506 \times 10^{-6} T^3 \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2} h_{2/3}^{-2/3}, \quad (\text{A.7})$$

which can be translated in central temperature decrement as (using  $T_{CMB} = 2.73 \text{ K}$  and the RJ approximation)

$$\Delta T(0) = -1.914 \times 10^{-2} T^3 \left[ 1 + \frac{T}{T_0} \right]^{-3/2} h_{2/3}^{-2/3} \text{ mK.} \quad (\text{A.8})$$

- **$\Delta T(0) - L_X$  relation :**

- **for  $T \gg T_0$  (rich clusters temperature range) :**

$$L_X = 2.206 \times 10^{45} \left( \frac{-\Delta T(0)}{1 \text{ mK}} \right)^{4/3} h_{2/3}^{-10/9} \text{ erg s}^{-1} \quad (\text{A.9})$$

- **for  $T \ll T_0$  (small groups temperature range) :**

$$L_X = 2.133 \times 10^{45} \left( \frac{-\Delta T(0)}{1 \text{ mK}} \right)^{3/2} h_{2/3}^{-1} \text{ erg s}^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

## Appendix B: Infall velocity and mean temperature

In this Appendix, we will find an expression for the infall velocity before the shock (noted  $v_1$ ) as a function of the mean temperature of the accreting system. To this purpose, the following reasoning in two steps is appropriate : we first show that  $v_1^2 \propto \phi_v$  provides a good approximation and then derive a useful expression for  $\phi_v$ .

We will then compare our result to hydrodynamic simulations, which will validate the use of the analytic expression found in the groups mass range.

### B.1. Reexpressing the infalling velocity

Let's assume that the gas inflow is stationary. In a spherical collapse model, the gas is assumed to be at rest at a radius  $r_{ta}$  (the so-called "turn-around radius") before falling into the cluster potential. Since the gas will not be subjected to many processes changing its internal energy during this inflow, we can assume that the flow is isentropic. Thus, applying the Bernoulli equation between  $r_{ta}$  and  $r_v$  (just before the shock) we obtain (see *e.g.* Landau & Lifshitz, 1959) :

$$\frac{v_1^2}{2} + \omega_1 + \phi_v = \omega_{ta} + \phi_{ta} \quad (\text{B.1})$$

where  $\omega$  denotes the gas specific enthalpy ( $\omega = c_p T$  with  $c_p$  the specific heat at constant pressure). Denoting  $\rho_{ta}$  and  $\rho_1$  the densities at  $r_{ta}$  and  $r_v$  and , the following expression for  $v_1$  can easily be found :

$$v_1^2 = -2\phi_v \left[ 1 - \frac{\phi_{ta}}{\phi_v} + c_p \frac{T_1}{\phi_v} \left( 1 - \left( \frac{\rho_{ta}}{\rho_1} \right)^{2/3} \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

In the spherical collapse model, the density at  $r_v$  is  $\sim 8$  times larger than at  $r_{ta}$ . We can thus write :

$$v_1^2 = -2\phi_v \left[ 1 - \frac{\phi_{ta}}{\phi_v} + \frac{c_p}{4} \frac{T_1}{\phi_v} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Obviously, in large mass systems, the last ratio will be negligible *i.e.*, the thermal energy of the gas will be negligible when compared to its potential energy (the so-called "cold inflow" hypothesis). As gas is preheated (*i.e.*, as  $T_1$  rises) or as the mass of the system is lowered this assumption is questioned, since the thermal content of the gas will be of the same order of the kinetic and potential energy. Nevertheless, we will assume in the following that this limiting behaviour only occurs at mass scales smaller than

groups of galaxies. We will show at the end of the appendix that hydrodynamic numerical simulations of structure formation in different cosmological models validate this last assumption.

We have thus :

$$v_1^2 = -2\phi_v \left(1 - \frac{\phi_{1a}}{\phi_v}\right). \quad (\text{B.4})$$

To take into account some uncertainties and shortcomings of this crude treatment (as the fact that the infall is usually along filaments and so not spherical), we will write the slightly more general formula :

$$v_1^2 = -2\eta\phi_v, \quad (\text{B.5})$$

where  $\eta$  is considered as a constant.  $\eta$  could be calibrated against numerical simulations (see *e.g.*, Miniati et al., 2000) or chosen so that the flow at infinite is the Hubble flow, as in Cavaliere et al. (1998). When used to compute the value of  $T_0$  in Sec. 2.3.2,  $\eta$  is determined by the former method.

Note that the established fact that the square of the infall velocity is proportionnal to the gravitational potential, both taken at the virial radius, is actually not a surprise. Indeed, before the shock, the gas is thought to follow the dark matter evolution, its velocity being equal to the dark matter one up to the virial radius (see for example the figure 15 of Frenk et al., 1999). Since it has been shown that the dark matter infall velocity in a spherical model scales as  $M^{1/3}$ , while the mean potential  $\phi \propto M/R$  scales as  $M^{2/3}$  (Ryu & Kang (1997), based on the work of Bertschinger (1985)), it is thus natural that  $v_1^2 \propto M^{2/3} \propto \phi$ .

## B.2. Linking $\phi_v$ with $T$

We now look for a useful expression for  $\phi_v$  without assuming any particular analytic expression for  $\phi(\mathbf{r})$ . First, since the Poisson equation states :

$$\nabla^2\phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{B.6})$$

we can write any gravitational potential in the form :

$$\phi(x) = 4\pi G \rho_c r_v^2 \tilde{\phi}(x), \quad (\text{B.7})$$

where  $\rho_c$  is a characteristic density (the background cosmological density for example),  $r_v$  is the virial radius,  $G$  the gravitational constant and  $\tilde{\phi}(x)$  is a dimensionless potential with  $x = r/r_v$ . Therefore we have in particular,

$$\phi_v = 4\pi G \rho_c r_v^2 \tilde{\phi}(1). \quad (\text{B.8})$$

By using this as a general relation, we assumed implicitly that  $\tilde{\phi}(1)$  does not depend on the mass of the system. However, numerical simulations indicate that the general expression for the gravitational potential is indeed universal (*i.e.* it takes the same form in different cosmological models), but its normalisation should depend slightly on the mass via the so-called concentration parameter  $c$

(Navarro et al., 1997, hereafter NFW). Indeed, using the so-called NFW analytic expression,  $\phi_v$  can be expressed as (see for example Lokas & Mamon, 2001)<sup>9</sup> :

$$\phi_v = 4\pi G \rho_c r_v^2 g(c). \quad (\text{B.9})$$

Since in these models,  $c$  is a slowly varying function of the mass ( $c(M) = (M/M_{15})^{-0.086}$  for a  $\Lambda$ CDM universe at  $z = 0$ ,  $M_{15}$  being the mass in units of  $10^{15} M_\odot$ ) it is easily shown that  $g(c) \propto T^{0.012}$ , that is to say,  $g(c)$  can be considered as constant to a very good approximation. As a consequence, ignoring the mass dependency of  $\tilde{\phi}(1)$  in equation (B.8) is reasonable and we will thus use equation (B.8) as a definition of the virial radius gravitational potential.

An even more practical form for equation (B.8) does involve the (supposed isothermal) ICM temperature  $T$ . It is achievable through the use of the virial theorem. It indeed provides us with general relations between  $r_v$  -  $M$  and  $M$  -  $T$  in the following form :

$$r_v = \left(\frac{3M}{4\pi\Delta\rho_c}\right)^{1/3} \quad (\text{B.10})$$

$$M = M_* \left(\frac{T}{T_*}\right)^{3/2}, \quad (\text{B.11})$$

where  $\Delta$  is the virial radius overdensity (taken throughout this paper to be 500, see Appendix A),  $\rho_c$  is the critical density and  $M_*$  and  $T_*$  are constants defined in Appendix A. As a conclusion, we can now write equation (B.8) as :

$$\phi_v = 4\pi G \rho_c \tilde{\phi}(1) \left(\frac{3M_*}{4\pi\Delta\rho_c}\right)^{2/3} \left(\frac{T}{T_*}\right) \quad (\text{B.12})$$

$$= \phi_1 \left(\frac{T}{T_*}\right) \quad (\text{B.13})$$

Eventually, by combining equations (B.13) and (B.5) we reach the following relation describing the scaling of  $v_1^2$  with  $T$  :

$$v_1^2 = -2\eta\phi_1 \left(\frac{T}{T_*}\right). \quad (\text{B.14})$$

Equation (B.14) is particularly interesting since it can be directly compared to the the results of hydrodynamic numerical simulations. Miniati et al. (2000) have examined the properties of shock waves around clusters and groups of galaxies in two hydro+N-body realisations of two different cosmological models. Having selected all structures with X-ray luminosity greater than  $10^{41}$  erg/s, they found that the relation between the mean temperature and the infall velocity is given by an equation of the form (we only quote their result for the  $\Lambda$ CDM cosmology, analogous expressions being found in the SCDM cosmology) :

$$v_s = v_{s0} \left(\frac{T}{T_s}\right)^{0.52}. \quad (\text{B.15})$$

<sup>9</sup> Note that the function  $g(c)$  defined here differs from the one adopted by Lokas & Mamon (2001)

20

S. Dos Santos &amp; O. Doré : Unifying groups and clusters with entropy

with

$$v_{80} = 1.9 \times 10^3 \text{ km s}^{-1} \text{ and}$$

$$T_8 = 7.8 \times 10^7 \text{ K}$$

Their result spans a range from  $10^6$  to several  $10^7$  K, *i.e.* from poor groups to clusters, and is analogous to equation (B.14)<sup>10</sup>. This, together with the fact that secondary infall models predict the same type of relation as the one we deduced between  $v_1$  and  $\phi_v$ , validates the assumption of cold inflow that was made in deriving equation (B.5), even for the group mass range.

### Appendix C: The shape factors $Q_X$ , $Q_{SZ}$ and $Q_M$ .

In this appendix, we evaluate the shape factors  $Q_X$ ,  $Q_{SZ}$  and  $Q_M$ , which enter the normalisation of the  $L_X - T$ ,  $y - T$  and  $M_{ICM} - T$  relations. These quantities could in fact be considered as renormalisation constants obtained by comparison with observations. We will instead show here that they can be computed using a motivated model for the adiabat profile. The model we present thus predicts not only the shape but also the normalisation of the above correlations.

#### C.1. Normalisation temperature

The normalisations of the three relations cited above are defined in equations (38), (42) and (54), where the temperature is in keV. The temperature at which the normalisation must be evaluated is obtained by equating the temperature shape function in each of these relations to 1. This is illustrated in figure C.1, which shows the following functions (the last two ones being the same) :

$$L_X(T) = \frac{T^5}{[1 + T/T_0]^3} \text{ (solid line)}$$

$$y(T) = \frac{T^3}{[1 + T/T_0]^{3/2}} \text{ (dashed line)}$$

$$M_{ICM}(T) = \frac{T^3}{[1 + T/T_0]^{3/2}} \text{ (dashed line),}$$

and their intersection with the horizontal unit line. We can see that the normalisation temperature of the three relations occurs at  $T \sim 1.3$  keV. These temperatures are well into the groups temperature range, and we will thus compute the normalisation in this regime. First of all, we need an motivated analytic adiabat profile to compute the integrals defining the three normalisation constants.

#### C.2. An analytic model for the adiabat Profile

Groups have a low surface brightness in X-rays and are thus difficult to observe up to their virial radius. Obtaining a temperature profile at this radius is obviously even more challenging. While the new generation of X-ray satellites

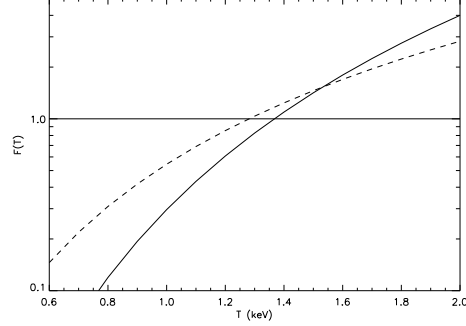


Fig. C.1. Normalisation temperature of the  $L_X - T$  (solid line),  $y - T$  and  $M_{ICM} - T$  (dashed line) relations. The three relations will thus be normalised at  $T \sim 1.3$  keV, in the groups mass range.

(Chandra and XMM-Newton in particular with its exceptional sensitivity) is expected to produce constraints on low density regions, ROSAT (whose energy band was perfectly adapted to the groups observation) has provided data mostly on the inner parts of these systems (see *e.g.*, Helsdon & Ponman, 2000). Nevertheless, David et al. (1996) have published adiabat profiles for two cool clusters ( $T \sim 1.5$  keV) nearly reaching the virial radius (as well as for even cooler groups, see their figure 10), using a  $\beta$ -model for the density and the best-fit power-law model for the temperature (despite large error bars). They found a isentropic core, followed by a very modest increase compared to clusters (where the virial value of the adiabat is at least 20 times higher than the core value).

This can be easily understood, if one recalls that groups are thought to accrete most of their gas adiabatically, and should thus have constant adiabat profiles (Balogh et al., 1999; Tozzi & Norman, 2001). However, this produces unacceptably large temperature gradients in small groups and the quasi-absence of the cooling-flow phenomenon, except in the largest clusters (Tozzi & Norman, 2001, see their figures 4c and 7b). It shows that somewhere between the center and the virial radius, shocks must increase somewhat the adiabat, in order to lower the temperature gradient, giving rise to an adiabatic inner core (much larger than the core radius) followed by a modestly increasing adiabat profile<sup>11</sup>.

One can seek an analytic expression for the adiabat profile by making use of the isothermal  $\beta$ -model

<sup>11</sup> Note that HCG62, one of the best examples of relaxed group ( $\bar{T} \sim 1$  keV), has a steep declining temperature outside the inner core (see fig. 4 of Finoguenov & Ponman, 1999), but has also an obvious cooling-flow.

<sup>10</sup> We will take the exponent of eq. (B.15) to be 1/2.

(Cavaliere & Fusco-Femiano, 1976). Suppose that the gas density profile is describe by this model *i.e.*,

$$n(x) = n_0 \left[ 1 + \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad (\text{C.1})$$

where the radii are rescaled in units of  $r_v$  and  $x_0$  is the core radius. Assuming isothermality, the dimensionless adiabat profile is then

$$f(x) = \left[ 1 + \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]^\beta \quad (\text{C.2})$$

Using the semi-analytic model already discussed in the text (Dos Santos 2001, in preparation, see Sec. 7.2), we found that, in an external preheated model (by QSOs or SNs), the adiabat profile of groups and clusters can be described approximately by the last equation with  $\beta = 1/2$  and a core radius varying with mass. Even if the systems modelled are not isothermal, this result is not surprising as the shocks are expected to leave a linearly rising adiabat profile (hence the value of  $\beta$ , see Thomas & Couchman, 1992; Tozzi & Norman, 2001; Brighenti & Mathews, 2001), while the isentropic accretion of gas leaves a constant adiabat profile. Fixing  $\beta$  to  $1/2$ , the core radius  $x_0$  determines the extend of the central isentropic core. We have found that  $x_0 = 0.7$  reproduces approximately the adiabat profile of small groups in our semi-analytic model, while  $x_0 = 0.1$  reproduces its behaviour in rich clusters. This is in line with the observational results of David et al. (1996) showing that the profiles are much shallower in groups than in clusters. Thus we will use  $\beta = 1/2$  and  $x_0 = 0.7$  in eq. (C.2) to compute the values of the shape factors.

### C.3. The shape factor $Q_X$

The theoretical shape factor is defined by:

$$\begin{aligned} Q_X &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{f^3(x)} \\ &= \int_0^1 x^2 \left[ 1 + \left( \frac{x}{0.7} \right)^2 \right]^{-3/2} dx \\ &\sim 0.1150 \end{aligned}$$

This value is very close to the best-fit value (0.12, considering  $Q_X$  as an adjustable parameter) and undistinguishable given the observational errors. Although the normalisation has been computed in the groups mass ranges, it recovers perfectly the slope and normalisation of rich clusters. We will thus use  $Q_X = 0.115$ .

### C.4. The shape factor $Q_{SZ}$

The shape factor for the  $y - T$  relation is given by :

$$Q_{SZ} = \int_0^\infty \left[ 1 + \left( \frac{x}{0.7} \right)^2 \right]^{-3/4} dx \quad (\text{C.3})$$

$$\sim 1.835$$

Here again the normalisation is in very good agreement with the observational data from Zhang & Wu (2000), despite the large dispersion of the latter (see figure 6).

### C.5. The shape factor $Q_M$

The shape factor for the  $M_{ICM} - T$  relation is given by :

$$\begin{aligned} Q_M &= \int_0^1 x^2 \left[ 1 + \left( \frac{x}{0.7} \right)^2 \right]^{-3/4} dx \\ &\sim 0.1915 \end{aligned}$$

The best-fit value to the data of Mohr et al. (1999, hereafter MME) is  $Q_M = 0.11$  *i.e.*,  $\sim 40\%$  lower than the value we compute. However, apart from pure measurements uncertainties and known biases<sup>12</sup>, several systematic effects can cause this disagreement : first, the major part of the 45 clusters they study are not detected up to the radius  $r_{500}$ . Thus, they extrapolate the data taking their best-fit slope out to  $r_{500}$ , which can be a source of errors. Second, as MME explain, computing  $r_{500}$  requires a model of the potential or a rescaling to the value of a given cluster (they chose A1795 for the scaling of their virial relations). If one of the assumptions made is erroneous, it is possible that their numbers quote a radius  $r_\Delta$  with  $\Delta \neq 500$ . Indeed, if  $r_{500}$  is underestimated by only 20 %, we obtain :

$$\begin{aligned} Q_M &= \int_0^{0.8} \left[ 1 + \left( \frac{x}{0.7} \right)^2 \right]^{-3/4} dx \\ &\sim 0.1136, \end{aligned}$$

which is very close to the best-fit value. We use this last value for  $Q_M$  in the  $M_{ICM} - T$  relation, as well as in the  $f_{gas} - T$  relation.

The luminosity of a cluster is dominated by the core gas (since it scales as the square of the density) and the SZ effect computed here is a central value (taking into account the beam smearing effect), while the gas mass depends mainly on the outer parts of the profile, where our assumption of self-similarity of the scaled adiabat profiles is more likely to break down (see section 7.3). This explains naturally why the predictions for  $Q_X$  and  $Q_{SZ}$  are much more accurate than for  $Q_M$ . Nevertheless, we consider the agreement between the theoretical values and the observed normalisations very satisfying. The fact that with the same model for the adiabat profile we can predict the correct normalisations of the cluster correlations in two very different wavebands is obviously a sign of coherence of the whole scheme. Since the shape factors are predicted, *the only parameter of the model is the central entropy in groups  $K_0$* , which was fit to the observations of central adiabat value.

<sup>12</sup> Note that testing their analysis method with hydrodynamic numerical simulations, MME find that they are likely to overestimate the ICM mass by a factor of  $\sim 12\%$ , which increases the disagreement with our  $Q_M$  value by the same amount



## .6 Physique des amas à partir d'observations-WL et SZ

O. Doré, F. R. Bouchet, Y. Mellier, R. Teyssier

*Cluster physics from joint weak gravitational lensing and  
Sunyaev-Zel'dovich data*

**Astronomy and Astrophysics 375, 14-24 (2001)**





## Cluster physics from joint weak gravitational lensing and Sunyaev-Zel'dovich data

O. Doré<sup>1</sup>, F. R. Bouchet<sup>1</sup>, Y. Mellier<sup>1,2</sup>, and R. Teyssier<sup>3,1,4</sup>

<sup>1</sup> Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France

<sup>2</sup> Observatoire de Paris, DEMIRM, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

<sup>3</sup> Service d'Astrophysique, DAPNIA, Centre d'Études de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup> Numerical Investigations in Cosmology (NIC) group, CEA Saclay, France

Received 9 February 2001 / Accepted 16 May 2001

**Abstract.** We present a self consistent method to perform a joint analysis of Sunyaev-Zel'dovich and weak gravitational lensing observation of galaxy clusters. The spatial distribution of the cluster main components is described by a perturbative approach. Assuming hydrostatic equilibrium and the equation of state, we are able to deduce, from observations, maps of projected gas density and gas temperature. The method then naturally entails a X-ray emissivity prediction which can be compared to observed X-ray emissivity maps. By comparing with 2 simulated clusters we find that this prediction turns out to be in very good agreement with the simulations. The simulated and predicted surface brightness images have a correlation coefficient higher than 0.9 and their total flux differs by 0.9% or 9%. The method should be able to deal with real data in order to provide a physical description of the state of the cluster and of its constituents. The tests performed show that we can recover the amount and the spatial distributions of both the baryonic and non-baryonic material with an accuracy better than 10%. So, in principle, it might indeed help to alleviate some well known biases affecting, e.g. baryon fraction measurements.

**Key words.** gravitational lensing – galaxies: clusters: general – cosmology: observations – X-rays: galaxies

### 1. Introduction

Whereas clusters of galaxies, as the largest gravitationally bound structures in the universe, are a natural probe of cosmology, observations, numerical simulations as well as timing arguments provide compelling evidence that most clusters are young and complex systems. Interaction with large-scale structures, merging processes and coupling of dark matter with the intra-cluster medium complicate the interpretation of observations and the modeling of each components. Since clusters are composed of dark matter (DM), galaxies and a hot dilute X-ray emitting gas (Intra cluster medium, ICM) accounting respectively for ~85%, ~10% and ~5% of their mass, the physics of the ICM bounded in a dark matter gravitational potential plays a major role in cluster formation and evolution.

Each component can be observed in many different ways. In particular, we refer to gravitational lensing effects (the weak-lensing regime here, WL) (Mellier 2000; Bartelmann & Schneider 2001), the Sunyaev-Zel'dovich (SZ) effect (Sunyaev & Zel'dovich 1972; Birkinshaw 1999) and X-ray emission (X) (Sarazin 1988). Whereas the former probes mostly the dark matter component, both the latter probe the baryons of the gravitationally bound ICM.

Due to observational progress, increasingly high quality data are available that enable multi-wavelength investigation of clusters down to an arc-minute scale (the most recent is the spectacular progress in SZ measurements, e.g. Reese et al. (2000) and Désert et al. (1998)). In contrast with past decades, it is now possible to analyse clusters of galaxies using X-ray, WL and SZ data at almost the same resolution, and to produce from them self consistent models. The exploration of reconstruction techniques to analyse together these high quality data sets and exploit their complementarity is a recent challenge. It has been tackled by several groups (Zaroubi et al. 1998; Grego et al. 1999; Reblinsky & Bartelmann 1999; Zaroubi et al. 2000; Castander et al. 2000; Holder et al. 2000). Zaroubi et al. and Reblinsky et al. attempted a full deprojection by assuming isothermality and axial symmetry, using respectively a least square minimization and a Lucy-Richardson algorithm. Grego et al. compare SZ-derived gas mass to WL-derived total mass by fitting a spheroidal  $\beta$  model. Whereas these methods give reasonable results it has been pointed out, e.g. by Inagaki et al. (1995) in the context of  $H_0$  measurement from SZ and X-ray observations, that both non-isothermality and asphericity analysis can trigger systematic errors as high as 20%.

In this paper, we propose an alternative direction in order to get rid of both isothermal and spherical hypotheses. Our method is based on a self-consistent use of

Send offprint requests to: O. Doré, e-mail: dore@iap.fr

WL and SZ observables, and on a perturbative development of general physical hypotheses. This approach allows us to test some very general physical hypotheses of the gas (hydrostatic equilibrium, global thermodynamic equilibrium) and also naturally provides some X observation predictions.

Observations only provide 2- $D$  projected quantities (e.g. mass, gas pressure, ...). These quantities are related to each other by physical hypotheses which express the 3- $D$  geometrical properties and the dynamical and thermodynamical stage of matter (e.g. sphericity, hydrostatic equilibrium, equation of state). In most cases, their 3- $D$  mathematical formulations do not have any tractable equivalent relating 2- $D$  projected quantities: in particular, projection along the line of sight does not provide an equation of state or a projected hydrostatic equilibrium equation. Therefore, as soon as we want to compare these data (WL, SZ, X) we have to deproject the relevant physical quantities ( $P_g, T_g, \rho_g \dots$ ). This can be done only using strong assumptions, either by using parametric models (e.g. a  $\beta$  model, Cavaliere & Fusco-Femiano 1976) or by assuming mere geometrical hypotheses (the former necessarily encompassing the latter) (Fabian et al. 1981; Yoshikawa & Suto 1999).

Because the latter keeps the physical grounds as general as possible and also avoids as many theoretical biases as possible, we preferred to focus on the geometric approach. Furthermore, this simplest choice is also motivated by looking at some images of observed clusters (Désert et al. 1998; Grego et al. 1999). Some do have striking regularity with almost circular or ellipsoidal appearance, as we expect for fully relaxed systems. Then, since relaxed clusters are expected to be spheroidal in favored hierarchical structure formation scenario, it is natural to try to relate the observed quasi-circularity (quasi-sphericity) to the 3- $D$  quasi-sphericity (quasi-spheroidality). We perform this by using some linearly perturbed spherical (spheroidal) symmetries in a self-consistent approach.

The paper is organised as follows: in Sect. 2 we define our physical hypothesis and notations. The method is precisely described in Sect. 3. We consider both the spherical as well as spheroidal cases and obtain a predicted X surface brightness map from a SZ decrement map and a WL gravitational distortion map. In Sect. 4 a demonstration with simulated clusters is presented before discussing its application to genuine data as well as perspectives for further developments in Sect. 5.

## 2. Hypotheses, Sunyaev-Zel'dovich effect and the weak lensing

We now briefly describe our notations as well as our physical hypothesis.

### 2.1. General hypotheses

Following considerations fully detailed in Sarrazin (1988) the ICM can be regarded as a hot and dilute plasma

constituted by ions and electrons, whose respective kinetic temperatures  $T_p$  and  $T_e$  will be considered as equal  $T_p = T_e \equiv T_g$ . This is the *global thermodynamic equilibrium hypothesis* which is expected to hold up to  $r_{\text{virial}}$  (see Teyssier et al. 1997 and Chièze et al. 1998 for a precise discussion). Given the low density (from  $n_e \sim 10^{-1} \text{ cm}^{-3}$  in the core to  $\sim 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$  in the outer part) and high temperature of this plasma ( $\sim 10 \text{ keV}$ ), it can be treated as a perfect gas satisfying the equation of state:

$$P_g = \frac{\rho_g k_B T_g}{\mu_e m_p} = \beta \rho_g T_g \quad (1)$$

with  $\beta \equiv \frac{k_B}{\mu_e m_p}$ . Let us consider in accord with the general paradigm that most of the mass is constituted by a dark matter component and thus neglect the gas mass with regards to it, and let us assume *stationarity* (no gravitational potential variation on a time scale smaller than the hydrodynamic time scale, e.g. no recent mergers). Then the gas assumed to be in hydrostatic equilibrium in the dark matter gravitational potential satisfies:

$$\nabla(\rho_g v_g) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla P_g = -\rho_g \nabla \Phi_{\text{DM}}. \quad (3)$$

At this point there is no need to assume isothermality.

### 2.2. Sunyaev-Zel'dovich effect and weak lensing

Inverse Compton scattering of cosmic background (CMB) photons by the electrons in the ICM modifies the CMB spectrum (Zel'dovich & Sunyaev 1969; Sunyaev & Zel'dovich 1972; Sunyaev & Zel'dovich 1980). The amplitude of the SZ temperature decrement  $\frac{\Delta T_{\text{SZ}}}{T_{\text{CMB}}}$  is directly proportional to the Comptonisation parameter  $y$  which is given by:

$$y = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl n_e k_B T_e = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl p_e \quad (4)$$

$$= \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int dl \frac{\rho_g k_B T_g}{\mu_e m_p} = \alpha \int dl P_g, \quad (5)$$

where  $\alpha \equiv \frac{\sigma_T}{m_e c^2}$ ,  $k_B$  is the Boltzmann's constant,  $\sigma_T$  is the Thomson scattering cross-section and  $dl$  is the physical line-of-sight distance.  $m_e$ ,  $n_e$ ,  $T_e$  and  $p_e$  are the mass, the number density, the temperature and the thermal pressure of electrons.  $\rho_g$  and  $T_g$  respectively denote the gas density and temperature, and  $\mu_e$  is the number of electrons per proton mass. Some further corrections to this expression can be found in Rephaeli (1995) and Birkinshaw (1999).

In parallel to this spectral distortion, the statistical determination of the shear field  $\gamma$  affecting the images of background galaxies enables us to derive the dominant projected gravitational potential of the lens produced by dark matter (DM):  $\phi_{\text{DM}}$  in our general hypothesis (see Mellier 2000 for details).

### 3. Method

#### 3.1. Principle

Let us suppose we have for a given cluster a set of SZ and WL data which enables us to construct a 2-*D* map of projected gas pressure as well as a 2-*D* projected gravitational potential map. We now propose an answer to the following question: how should we co-analyze these various data sets? Our first aim is to develop a method which allows us to get maps of projected thermodynamical quantities with as few physical hypotheses as possible.

Our method is the following. Let us suppose then that these maps have almost a rotationnal symmetry, as is the case for a vast class of experimental observations as e.g. in Fig. 1. More precisely, let us suppose that the projected gas pressure  $y$  as well as the observed projected gravitational potential  $\phi_{DM}$  can be well fitted by the following type of functions:

$$y(R, \varphi) = y_0(R) + \varepsilon y_1(R) m(\varphi) \quad (6)$$

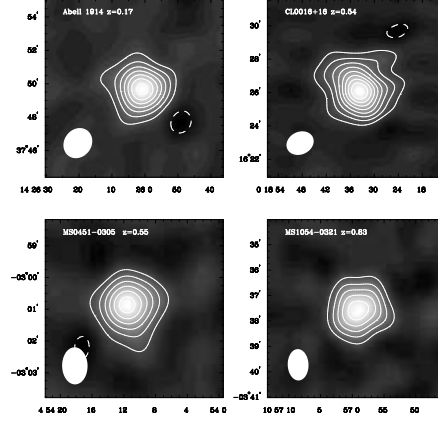
$$\phi_{DM}(R, \varphi) = \phi_{DM,0}(R) + \varepsilon \phi_{DM,1}(R) n(\varphi) \quad (7)$$

where  $\varepsilon \ll 1$ ,  $(R, \varphi)$  denotes polar coordinates in the image plane and  $m$  and  $n$  are some particular functions. This description means first of all that the images we see are linear perturbations from some perfect circularly symmetric images, and second that the perturbation might be described conveniently by the product of a radial function and an angular function. Equivalently, we can assert that to zeroth order in  $\varepsilon$  our images are circularly symmetric but they admit some corrections to a first order in  $\varepsilon$ .

We then assume that these observed perturbed symmetries are a consequence of an intrinsic 3-*D* spherical symmetry linearly perturbed as well. This point constitutes our key hypothesis. It means that to the zeroth order in a certain parameter (e.g.  $\varepsilon$ ) our clusters are regular objects with a strong circular symmetry but they admit some first order (linear) perturbations away from this symmetry, whose angular part is separable. As a consequence of these assumptions we will make use of this linearly perturbed symmetry to get a map of some complementary projected thermodynamical quantities, the gas density  $D_g$  and the gas temperature  $\zeta_g$ , successively to zeroth and first order in  $\varepsilon$ .

Formulated this way, the problem yields a natural protocol:

- Looking at some maps with this kind of symmetry, we compute a zeroth order map ( $y_0(R)$ ,  $\phi_0(R)$ ) with a perfect circular symmetry by averaging over some concentric annulus. A correction for the bias introduced by perturbations is included. These zeroth order quantities allow us to derive some zeroth order maps of  $D_{g,0}(R)$  and  $\zeta_{g,0}(R)$  with a perfect circular symmetry;
- We then take into account the first order corrections to this perfect symmetry ( $y_1(R)m(\varphi)$ ,  $\phi_1(R)n(\varphi)$ ) and infer from them first order correction terms to the zeroth order maps:  $D_{g,1}(R, \varphi)$  and  $\zeta_{g,1}(R, \varphi)$ .



**Fig. 1.** Images of the SZ effect observed towards four galaxy clusters with various redshifts. The contours correspond to 1.5 to 5 times the noise level. Data were obtained with the low-noise cm-wave receiver installed on the OVRO and BIMA mm-wave interferometric arrays (Holder & Carlstrom 1999). The bottom-left white ellipse denotes the synthesised beam for each observation.

Even if, for the sake of clarity, we formulate our method assuming a perturbed circular symmetry, it applies equivalently to a perturbed elliptical symmetry, as will be shown below. In this more general case, we assume that the cluster exhibits a linearly perturbed spheroidal symmetry.

#### 3.2. The spherically symmetric case:

##### From observations to predictions

Let us now apply the method to the case where the projected gas density (SZ data) and the projected gravitational potential (WL data) look almost circular. These observations lead us to suppose that the 3-*D* gas pressure, the gravitational potential, the gas density and the gas temperature can be well described by the following equations:

$$\begin{cases} P_g(r, \theta, \varphi) = P_{g,0}(r) + \varepsilon P_{g,1}(r)f(\theta, \varphi) \\ \Phi_{DM}(r, \theta, \varphi) = \Phi_{DM,0}(r) + \varepsilon \Phi_{DM,1}(r)g(\theta, \varphi) \\ \rho_g(r, \theta, \varphi) = \rho_{g,0}(r) + \varepsilon \rho_{g,1}(r)h(\theta, \varphi) \\ T_g(r, \theta, \varphi) = T_{g,0}(r) + \varepsilon T_{g,1}(r)k(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (8)$$

where  $(r, \theta, \varphi)$  are spherical coordinates centered on the cluster.

##### 3.2.1. The hydrostatic equilibrium

If we first apply the hydrostatic equilibrium equation  $\nabla P_g = -\rho_g \nabla \Phi_{DM}$  we get the following equations. To zeroth order in  $\varepsilon$  we have

$$P'_{g,0}(r) = -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,0}(r), \quad (9)$$

and to first order in  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} P'_{g,1}(r)f(\theta, \varphi) &= -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,1}(r)g(\theta, \varphi) \\ &\quad -\rho_{g,1}(r)\Phi'_{DM,0}(r)h(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

$$P_{g,1}(r)\partial_\theta f(\theta, \varphi) = -\rho_{g,0}(r)\Phi_{DM,1}(r)\partial_\theta g(\theta, \varphi) \quad (11)$$

$$P_{g,1}(r)\partial_\varphi f(\theta, \varphi) = -\rho_{g,0}(r)\Phi_{DM,1}(r)\partial_\varphi g(\theta, \varphi) \quad (12)$$

where “ $'$ ” denotes the derivative with regards to  $r$ . Combining Eqs. (11) and (12) we get

$$f(\theta, \varphi) = \lambda_1 g(\theta, \varphi) + \lambda_2 \quad (13)$$

where  $\lambda_{1,2}$  are constants. Then, by using Eq. (10) we can write

$$f(\theta, \varphi) = \gamma_1 h(\theta, \varphi) + \gamma_2 \quad (14)$$

where  $\gamma_{1,2}$  are constants as well. At this point, we can get rid of  $\lambda_2$  and  $\gamma_2$  by absorbing them in the zeroth order mere radial term (i.e.  $\rho_{g,0}(r)$  and  $\Phi_{DM,0}(r)$ ). This means we can consider  $\lambda_2 = 0$  and  $\gamma_2 = 0$ . Similarly, we choose to rescale  $\rho_{g,1}(r)$  and  $\Phi_{DM,1}(r)$  so that we can take  $\gamma_1 = \lambda_1 = 1$ . These simple equalities lead us to assume from now on:

$$f(\theta, \varphi) = h(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi). \quad (15)$$

This is in no way a restriction since it simply means that we absorb integration constants by redefining some terms. This is possible since the relevant part of  $f$  (and thus  $h$ ) will be fitted on observations, as will be shown below. Taking Eq. (15) into account, Eqs. (10)–(12) simplify to:

$$P'_{g,0}(r) = -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,0}(r) \quad (16)$$

$$P'_{g,1}(r) = -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,1}(r) - \rho_{g,1}(r)\Phi'_{DM,0}(r) \quad (17)$$

$$P_{g,1}(r) = -\rho_{g,0}(r)\Phi_{DM,1}(r). \quad (18)$$

### 3.2.2. The equation of state

We have now identified the angular part to the first order correction of  $P_g$ ,  $\Phi_{DM}$  and  $\rho_g$ . We still have to link those quantities to the angular dependent part of the temperature  $T_g$ , namely  $k(\theta, \varphi)$ . This is done naturally by using the equation of state (1), which directly provides, to zeroth and first order in  $\varepsilon$ :

$$P_{g,0}(r) = \beta\rho_{g,0}(r)T_{g,0}(r) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P_{g,1}(r)f(\theta, \varphi) &= \beta\rho_{g,1}(r)T_{g,0}(r)f(\theta, \varphi) \\ &\quad + \beta\rho_{g,0}(r)T_{g,1}(r)k(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

This last equation leads naturally to  $f(\theta, \varphi) = k(\theta, \varphi)$  if we decide once again to absorb any multiplicative factor in the radial part. This way we see that our choice of separating the radial and angular part is in no way a restriction. We eventually get

$$P_{g,0}(r) = \beta\rho_{g,0}(r)T_{g,0}(r) \quad (21)$$

$$P_{g,1}(r) = \beta\rho_{g,1}(r)T_{g,0}(r) + \beta\rho_{g,0}(r)T_{g,1}(r). \quad (22)$$

### 3.2.3. The observations

Given this description of the cluster physical state, the experimental SZ and WL data provide the projected quantities  $y(R, \varphi)$  and  $\phi_{DM}(R, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} y(R, \varphi) &= \alpha \int P_{g,0}(r)dl + \varepsilon \alpha \int P_{g,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \\ &\equiv y_0(R) + \varepsilon y_1(R)m(\varphi) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi_{DM}(R, \varphi) &= \int \Phi_{DM,0}(r)dl + \varepsilon \int \Phi_{DM,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \\ &\equiv \phi_{DM,0}(R) + \varepsilon \phi_{DM,1}(R)m(\varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

Note that in order to get this set of definitions we choose the polar axis of the cluster along the line of sight so that the same azimuthal angle  $\varphi$  is used for 2-D and 3-D quantities.

Our aim is now to derive both a projected gas density map and projected temperature map as defined by:

$$D_g(R, \varphi) = \int \rho_g(r, \varphi)dl \quad (25)$$

$$= \int \rho_{g,0}(r)dl + \varepsilon \int \rho_{g,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \quad (26)$$

$$\equiv D_{g,0}(R) + D_{g,1}(R, \varphi) \quad (27)$$

$$\zeta_g(R, \varphi) = \int T_g(r, \varphi)dl \quad (28)$$

$$= \int T_{g,0}(r)dl + \varepsilon \int T_{g,1}(r)f(\theta, \varphi)dl \quad (29)$$

$$\equiv \zeta_{g,0}(R) + \zeta_{g,1}(R, \varphi). \quad (30)$$

### 3.2.4. A projected gas density map to zeroth order...

Now that we have expressed our observables in terms of 3-D physical quantities, it is easy to infer a gas density map successively to zeroth and first order in  $\varepsilon$ . To zeroth order the hydrostatic equilibrium condition (9) states that

$$P'_{g,0}(r) = -\rho_{g,0}(r)\Phi'_{DM,0}(r). \quad (31)$$

In order to use it we need to deproject the relevant quantities. From the well-known spherical deprojection formula (Binney & Tremaine 1987) based on Abel's transform we have:

$$\alpha P_{g,0}(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty y'_0(R) \frac{dR}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty y'_0(r \cosh u) du \quad (33)$$

where  $R = r \cosh u$ . Thus, we can write

$$\alpha P'_{g,0}(r) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cosh u y''(r \cosh u) du \quad (34)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{R} \frac{R}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} y''_0(R) dR. \quad (35)$$

Similarly,

$$\Phi'_{DM,0}(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{R} \frac{R}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \phi''_{DM}(R) dR. \quad (36)$$

We then get for the projected gas density

$$D_{g,0}(R) = -2 \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{P'_{g,0}(r)}{\Phi'_{DM,0}(r)} \quad (37)$$

$$= -\frac{2}{\alpha} \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\int_r^\infty \frac{s ds}{r(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} y_0''(s)}{\int_r^\infty \frac{s ds}{r(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \phi_0''(s)} \right). \quad (38)$$

### 3.2.5. ... and a projected gas temperature map to zeroth order

Once we build this projected gas density map, we can recover the projected gas temperature map. If we apply the equation of state (19) we get:

$$\zeta_{g,0}(R) = \frac{1}{\beta} \int \frac{P_{g,0}(r)}{\rho_{g,0}(r)} dl \quad (39)$$

$$= -\frac{1}{\beta} \int \frac{P_{g,0}(r)}{P'_{g,0}(r)} \Phi'_{DM,0}(r) dl \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{\pi\beta} \int_R^\infty \frac{P_{g,0}(r)}{P'_{g,0}(r)} \Phi'_{DM,0}(r) \frac{r dr}{(r^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

Since all the required functions ( $P_{g,0}$ ,  $P'_{g,0}$ ,  $\Phi'_{DM,0}$ ) have been derived in the previous section (Eqs. (33) and (35)) we can get in this way a projected gas temperature map.

### 3.2.6. Corrections from departure to spherical symmetry: a projected gas density map to first order. ...

We now reach the core of our method, namely we aim at deriving the quantity  $D_{g,1}$  defined by (27), i.e. the first order correction to the perfectly circular term :

$$D_g(R, \varphi) = D_{g,0}(R) + \varepsilon D_{g,1}(R, \varphi) \quad (42)$$

$$= \int \rho_{g,0}(r) dl + \varepsilon \int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl. \quad (43)$$

If we derive Eq. (18) and combine it with Eq. (17) we note that

$$\rho'_{g,0}(r) \Phi_{DM,1}(r) = \rho_{g,1}(r) \Phi'_{DM,0}(r). \quad (44)$$

Therefore we can write

$$\int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl = \int \frac{\rho'_{g,0}(r)}{\Phi'_{DM,0}(r)} \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl. \quad (45)$$

At this point we want to express this quantity either in terms of WL data or in terms of SZ data depending on their quality, or even better, in terms of an optimal combination of them.

WL data provide straightforward access to the function  $\phi_1(R)m(\varphi) = \int \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl$  thus we choose to approximate (45) by

$$\begin{aligned} \int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl &\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{\Phi'_{DM,0}(R)} \int \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \\ &\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{\Phi'_{DM,0}(R)} \phi_1(R)m(\varphi) \\ &\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{\Phi'_{DM,0}(R)} (\phi_{DM}(R, \varphi) - \phi_0(R)) \end{aligned} \quad (46)$$

where we used the definitions of Sect. 3.2.3 and where  $R$  corresponds to the radius observed in the image plane, i.e. the radius  $r$  equal to the distance between the line of sight and the center of the cluster. We will discuss this approximation in more detail in Sect. 3.2.8 and validate it through practical implementation on simulations in Sect. 4. We already can make the following statements: if the line of sight follows a line of constant  $r$  throughout the domain of the perturbation, this expression would be rigorously exact. Moreover, it turns out to be a good approximation because of the finite extent of the perturbation.

On the other hand, SZ data provide a measurement of the function  $y_1(R)m(\varphi) = \int P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl$  therefore, we can use Eqs. (18) and (16) to write

$$\int \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl = \int \frac{\rho'_{g,0}(r)}{P'_{g,0}(r)} P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (47)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} \int P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (48)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} y_1(R)m(\varphi) \quad (49)$$

$$\simeq \frac{\rho'_{g,0}(R)}{P'_{g,0}(R)} (y(R, \varphi) - y_0(R)). \quad (50)$$

Here again we used the same notation and approximation as in Eq. (46). Note however that as soon as we assumed isothermality, the ratio  $\rho'_{g,0}/P'_{g,0}$  is constant, therefore this last step is exact. Were we not assuming isothermality, the departure from isothermality is expected to be weak, thus this last approximation should be reasonable.

These last two alternative steps are crucial to our method since these approximations link the non spherically symmetric components of various quantities. They are reasonable, as will be discussed in Sect. 3.2.8 and will be numerically tested in Sect. 4.

Of course, only well-known quantities appear in Eqs. (46) and (50):  $y$ ,  $y_0$ ,  $\phi_{DM}$  and  $\phi_0$  are direct observational data whereas  $P_{g,0}(r)$  and  $\rho_{g,0}(r)$  are zeroth order quantities previously derived.

### 3.2.7. ... and a projected gas temperature map to first order

The projected temperature map can be obtained the same way as before. By using first the equation of state we can write :

$$\begin{aligned} T_{g,0}(r) + \varepsilon T_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\beta} \frac{(P_{g,0}(r) + \varepsilon P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi))}{(\rho_{g,0}(r) + \varepsilon \rho_{g,1}(r) f(\theta, \varphi))} \\ &\simeq \frac{1}{\beta} \left( \frac{P_{g,0}(r)}{\rho_{g,0}(r)} + \varepsilon P_{g,1}(r) \frac{\rho_{g,0}(r) - \rho_{g,1}(r)}{\rho_{g,0}^2(r)} f(\theta, \varphi) \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Hence, since

$$\zeta(R, \varphi) = \zeta_0(R, \varphi) + \varepsilon \zeta_1(R, \varphi) \quad (52)$$

$$= \int T_{g,0}(r) dl + \varepsilon \int T_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (53)$$

we have

$$\zeta_1(R, \varphi) = \int \frac{\rho_{g,0}(r) - \rho_{g,1}(r)}{\rho_{g,0}^2(r)} P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl. \quad (54)$$

Here we choose to approximate the last integral as previously discussed in order to make use of observational SZ data. Therefore we rewrite this last equation as:

$$\begin{aligned} \zeta_1(R, \varphi) &\simeq \frac{\rho_{g,0}(R) - \rho_{g,1}(R)}{\rho_{g,0}^2(R)} \int P_{g,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \\ &\simeq \frac{\rho_{g,0}(R) - \rho_{g,1}(R)}{\rho_{g,0}^2(R)} y_1(R) m(\varphi) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\simeq \frac{\rho_{g,0}(R) - \rho_{g,1}(R)}{\rho_{g,0}^2(R)} (y(R, \varphi) - y_0(R)). \quad (56)$$

We obtain this way an expression to first order for the projected temperature in terms of either observed quantities or previously derived functions.

### 3.2.8. Why the previous approximation is reasonable on intuitive grounds

Our previous approximations can be justified on intuitive grounds even if we will take care in validating it numerically in Sect. 4 below. It relies on the fact that perturbations have by definition a finite extent, i.e. the first order correction to the perfectly circular (spherical) term is non zero only within a finite range. The typical size and amplitude of the perturbation can be easily scaled from the SZ and WL data set. This guarantees the validity of our assumptions on observational grounds. The key point is that the perturbation itself has a kind of axial symmetry, whose axis goes through the center of the cluster and the peak of the perturbation. This is reasonable if the perturbation originates in e.g. an incoming filament but not for a substructure. The latter would therefore have to be treated separately by superposition (see Sect. 5). This leads naturally to the statement that the typical angle we observe in the image plane is equal to the one we would observe if the line of sight were perpendicular to its actual direction, i.e. the perturbation as intrinsically the same angular extent in the directions along the line of sight and perpendicular to it. This is illustrated schematically in Fig. 2.

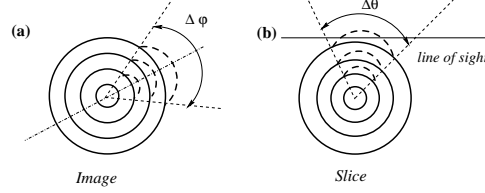
Given this description, we are now in a position to discuss the validity of our approximation. It consists of approximating the line of sight integral

$$\int g(r) \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (57)$$

by

$$g(R) \int \Phi_{DM,1}(r) f(\theta, \varphi) dl \quad (58)$$

where  $g$  is any radial function. This approximation would be exact if  $g(r)$  were constant in the relevant domain, i.e. if the line of sight had a constant  $r$ . As mentioned before, this is the case in Eq. (50) if we assume isothermality.



**Fig. 2.** We represent schematically in **a**) an image corresponding to our hypothesis. The full line corresponds to the perfectly circular 2-D term, e.g.  $\phi_{DM,0}$ , and the dashed line to the first perturbative correction to it, e.g.  $\phi_{DM,1}m(\varphi)$ .  $\Delta\varphi$  represents the observed angular extent. In **b**) we represent a schematic slice in the 3-D potential responsible for this image. This slice has been performed along the dash-two-dotted plane indicated in figure **a**). Here again, the full line corresponds to the perfectly circular 3-D term, e.g.  $\Phi_{DM,0}$ , and the dashed line to the first perturbative correction to it, e.g.  $\Phi_{DM,1}f(\theta, \varphi)$ . The line of sight direction is indicated by the full thin line. Were the line of sight perpendicular to this slice plane, we would observe the angular extent  $\Delta\theta$ . Giving an axial symmetry to this perturbation leads us to assess that  $\Delta\varphi \simeq \Delta\theta$ .

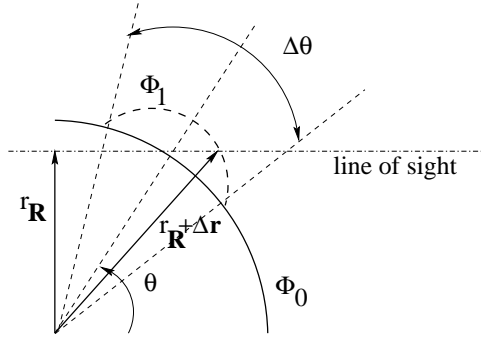
However the functions  $g(r)$  we might deal with may scale roughly as  $r^2$ , as e.g.  $\rho'_{g,0}(r)/P_{g,0}(r)$  in Eq. (46), thus it is far from being constant. The subsequent error induced can be estimated by the quantity  $\Delta r g'(r)$  where  $\Delta r$  is the maximum  $r$  discrepancy between the value assumed,  $g(R)$ , and the actual value as it is schematically illustrated in Fig. 3. In the worst case,  $g'(r)$  scales as  $r$ . Then, by using the obvious notations defined in this figure we get

$$(\Delta r)_{\max} = R \left( 1 - 1/\sin \left( \theta - \frac{\Delta\theta}{2} \right) \right). \quad (59)$$

Naturally this quantity is minimal for  $\theta \simeq 90^\circ$  and diverges for  $\theta \simeq 0^\circ$  when  $\Delta\theta = 0^\circ$ : the error is minimal when the line of sight is nearly tangential ( $\theta \simeq 90^\circ$ ) and so is almost radial in this domain, and maximal when it is radial ( $\theta = 0^\circ$ ). This in principle is a very bad behavior, but the fact is that the closer  $\theta$  is to  $0^\circ$  the weaker the integrated perturbation is since it becomes always more degenerate along the line of sight, i.e. the integrated perturbations tend to a radial behavior and will therefore be absorbed in the  $\Phi_{DM,0}(r)$  term. The extreme situation, i.e. when  $\theta = 0^\circ$ , will trigger a mere radial image as long as the perturbation exhibits a kind of axial symmetry. This error is impossible to correct since we are dealing with a fully degenerate situation but it will not flaw the method at all since the integrated perturbation will be null. This approximation will be validated numerically below.

### 3.3. How to obtain a X-ray prediction

The previously derived map offers an advantage that we now aim to exploit, namely the ability of precise X



**Fig. 3.** We define in this figure the notation necessary to discuss our approximation.  $r_R$  is the parameter value given to the function  $(f(r))_R$  and  $r_R + \Delta r$  is an actual value along the line of sight.

prediction. Indeed, for a given X spectral emissivity model, the X-ray spectral surface brightness is

$$S_X(E) = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \int n_e^2 \Lambda(E, T_e) dl \quad (60)$$

where  $\Lambda$  is the spectral emissivity,  $z$  is the redshift of the cluster and  $E$  is the energy on which the observed band is centered. Hence we can write, assuming a satisfying knowledge of  $z$  and  $\Lambda$ :

$$S_X(E) \propto \int n_e^2 T_e^{1/2} dl \quad (61)$$

$$\propto \int \rho_g^2 T_g^{1/2} dl \quad (62)$$

$$\propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl + 2 \int \rho_{g,0} T_{g,0}^{1/2} \rho_{g,1} f(\theta, \varphi) dl + \frac{1}{2} \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{-1/2} T_{g,1} f(\theta, \varphi) dl \quad (63)$$

where we omitted to write the  $(r)$ s for clarity's sake. If we now make use of the same approximation as used and discussed before, we can express directly this quantity in terms of observations  $y$  and  $\phi$ . We get indeed

$$\begin{aligned} S_X(E) &\propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl \\ &+ 2 \int \rho_{g,0}(R) T_{g,0}^{1/2}(R) \int \rho_{g,1} f(\theta, \varphi) dl \\ &+ \frac{1}{2} \int \rho_{g,0}^2(R) T_{g,0}^{-1/2}(R) \int T_{g,1} f(\theta, \varphi) dl \\ &\propto \int \rho_{g,0}^2 T_{g,0}^{1/2} dl + 2 \int \rho_{g,0}(R) T_{g,0}^{1/2}(R) D_{g,1}(R, \varphi) dl \\ &+ \frac{1}{2} \int \rho_{g,0}^2(R) T_{g,0}^{-1/2}(R) \zeta_{g,1}(R, \varphi) dl. \end{aligned} \quad (65)$$

Both the zeroth order terms  $T_{g,0}$  and  $\rho_{g,0}$ , and the first order corrections  $D_{g,1}$  and  $\zeta_{g,1}$  have been derived in

the previous sections. We are thus able to generate self-consistently a X luminosity map from our previously derived maps. This is a very nice feature of this method. We will further discuss the approximation and its potential bias in the next section.

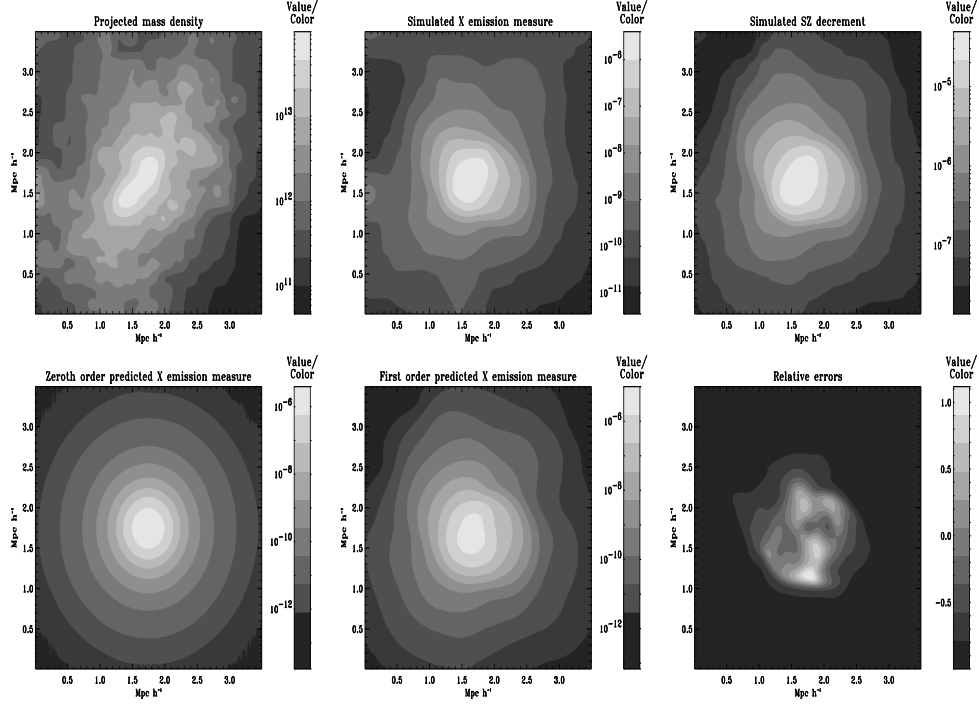
This derivation opens the possibility of comparing on the one hand SZ and WL observations with, on the other hand, precise X-ray measurements as taken e.g. by XMM or CHANDRA. Note that in the instrumental bands of most X-ray satellites the  $T_g$  dependence is very weak and can be neglected. This can be easily taken into account by eliminating the  $T_g$  dependence in the previous formula. Even if the interest of such a new comparison is obvious, we will discuss it more carefully in the two following sections. In principle, one could also easily make some predictions concerning the density weighted X-ray temperature defined by the ratio  $\int n_g^2 T_g dl / \int n_g^2 dl$  but the fact is that since the gas pressure and so the SZ effect tends to have a very weak gradient, we are not able in principle to reproduce all the interesting features of this quantity, namely the presence of shocks.

#### 4. Application on simulations

In order to demonstrate the ability of the method in a simplified context we used some outputs of the recently developed  $N$ -body + hydrodynamics code RAMSES simulating the evolution of a  $\Lambda$ -CDM universe. The RAMSES code is based on Adaptive Mesh Refinement (AMR) technique in order to increase the spatial resolution locally using a tree of recursively nested cells of smaller and smaller size. It reaches a formal resolution of  $12 h^{-1}$  kpc in the core of galaxy clusters (see Réfrégier & Teyssier 2000 and Teyssier 2001, *in preparation*, for details). We use here the structure of two galaxy clusters extracted from the simulation to generate our input observables, i.e. X-ray emissivity, SZ decrement and projected mass density (or projected gravitational potential).

The relevant observables, i.e. projected mass density, SZ decrement and, for comparison purpose only, the X-ray emission measure, of the 2 clusters are depicted using a logarithmic scaling in Figs. 4 and 5 (upper panels). These clusters have been extracted from the simulation at  $z = 0.0$  and thus tend to be more relaxed than high  $z$  ones: they are ordinary clusters of virial mass (defined by  $\delta_{334}$  in our particular cosmology)  $4.50 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$  and  $4.15 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$ . Both exhibit a rather regular shape, i.e. they have not recently undergone a major merging process. The depicted boxes are respectively  $3.5 h^{-1}$  Mpc and  $4.0 h^{-1}$  Mpc wide. We smooth the outputs using a Gaussian of width  $120 h^{-1}$  kpc thus degrading the resolution. We did not introduce any instrumental noise. For both clusters, the gas temperature decreases by a factor of less than 2 from the center to the virial radius. Beyond, the temperature profile is steeper. Nevertheless, for the sake of simplicity we will assume that  $T_g$  is constant, making the discussion of  $T_{g,0}$  and  $T_{g,1}$  useless at this point.



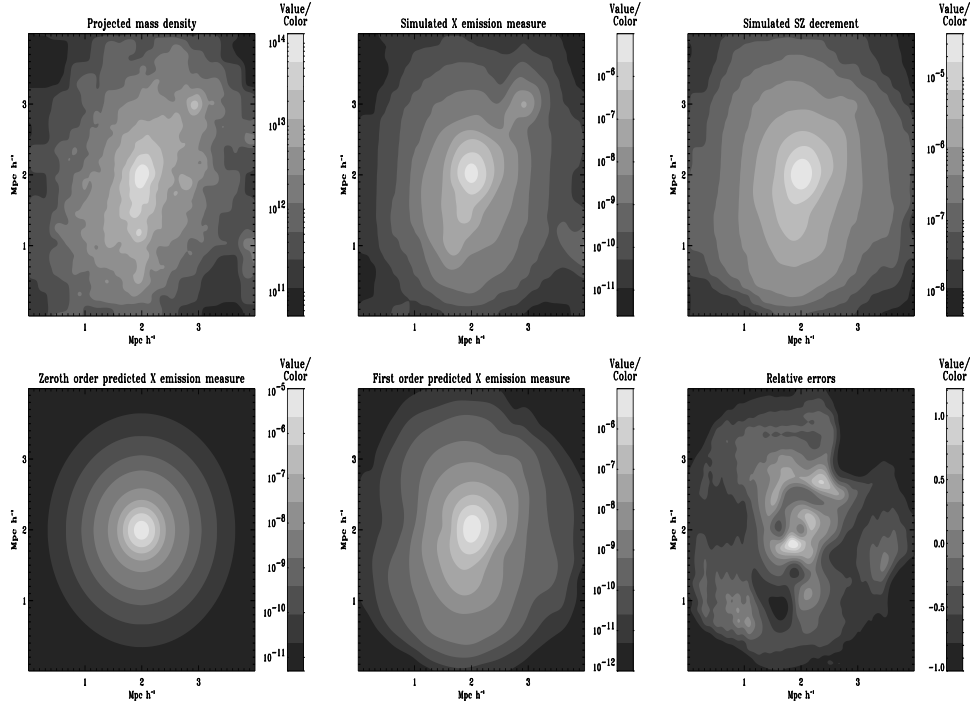


**Fig. 4.** The upper panel shows the results of simulations, from left to right, all using a logarithmic scaling, the projected mass density ( $M_{\odot} \text{ Mpc}^{-2}$ ), the X-ray emission measure ( $\text{cm}^{-6} \text{ Mpc}$ ) and the SZ  $y$  parameter. This cluster is a good candidate for our approach since it has a circular core with surrounding perturbations so would be inappropriate for an ellipsoidal fit. The lower panel shows, from left to right a zeroth order predicted X emission measure, the first order prediction (the zeroth order term plus the first order correction), both using a logarithmic scaling as well as the the relative error map, i.e. (predicted – simulated)/simulated X emission measure using a linear scaling. The 10 error contours are linearly separated between  $-1.0$  and  $1$ . Each box is  $3.5 h^{-1} \text{ Mpc}$  wide. The correlation coefficient between the predicted and the simulated X-ray emission measure is  $0.978$ . The total fluxes differ only by  $0.91\%$ , thus even if the relative error map increases at high  $R$  the total error remains small due to the great dynamical range involved.

We apply the method previously described using perturbed spherical symmetry. We define the pixel with the highest luminosity to be the center. The zeroth order circular description of the gas density is computed averaging data over concentric annuli and we then add to it some first order corrections. Note that since we assume isothermality, SZ data give us straightforwardly a projected gas density modulo a temperature  $T_{g,0}$  coefficient, thus we use the formulation of Eq. (50), which is exact in this context. This constant temperature is fixed using the hydrostatic equilibrium and the WL data.

In Figs. 4 and 5 (lower panels) we show the predicted X-ray emission measure to zeroth and first order as well as a map of relative errors. Note that to first order the shape of the emission measure is very well reproduced. The cross-correlation coefficients between the predicted and simulated X-ray emission measures are  $0.978$  and  $0.986$ . Of

course this is partly due to the assumed good quality of the SZ data but nonetheless, it demonstrates the validity of our perturbative approach as well as of our approximation. The approximation performed in Eq. (65), i.e. the multiplication by the function  $\rho_{g,0}(R)$  naturally tends to cut out the perturbations at high  $R$ . This is the reason why the further perturbations are slightly less well reproduced and the relative errors tend to increase with  $R$ . Nevertheless, since the emission falls rapidly with  $R$ , as is visible in the lower figures (note the logarithmic scaling), the total flux is well conserved, respectively to  $0.9\%$  and  $9\%$ . This last number might illustrate that the large extent of the perturbations in the second case may limit our method. An ellipsoidal fit could help decrease this value. Note that the clump visible mainly in X-ray emission measure in 5 is not reproduced. This is natural because it does not appear through the SZ effect since the pressure remains uniform



**Fig. 5.** As in the previous figure for a different cluster. The structure of the X-ray emission measure is very well reproduced for the inner part. The correlation coefficient between the predicted and simulated map is 0.986. As is visible on the relative error map, whose 10 levels are linearly separated between  $-1.0$  and  $1.0$ , the outer part is naturally smeared by our approximation. The visible clump on the top-right should be treated separately. Each box is  $4.0 h^{-1}$  Mpc wide. The total flux differs by 9%.

throughout the clumps. If resolved by WL, this substructure should be treated separately, e.g. by considering the addition of a second very small structure. Note that the first cluster showed exhibits a spherical core elongated in the outer region, thus it is not actually as ellipsoidal as it looks, which may explain why our perturbed spherical symmetry works well.

## 5. Discussion

### 5.1. Hypotheses ... and non hypotheses

The general and robust hypotheses have been introduced and discussed in Sect. 2.1. Our key hypothesis consists of assuming the validity of a perturbative approach and in choosing the nature of this perturbation, i.e. with a radial/angular separation. It was initially motivated by theoretical predictions, observations and simulations which show that relaxed clusters are regular and globally spheroidal objects. In fact, comparison of our models with simulated clusters confirms that our assumptions turn out

be reasonable. However, our method cannot deal properly with sharp features e.g. shocks waves due to infalling filaments. Assuming the validity of the angular and radial separation implies the equality of this angular part for all relevant physical quantities ( $P_g$ ,  $T_g$ ,  $\phi_{DM}$ ...), using to a first order in  $\epsilon$  the hydrostatic equilibrium and the equation of state. If this is not satisfied in practice, then we could question the validity of this separation or of the underlying physics introduced in the cluster model. Our experience with simulations shows that for reasonably relaxed clusters which do not experience a major merging process, the angular part of the perturbation is constant amongst observables. In that case, the separation (and thus the equality of the angular perturbation) seems to be a good hypothesis in general, whereas its failure is a sign of non-relaxation, i.e. non-validity of our general physical hypothesis.

The validity of our approximations also depends on physical quantities which are assumed to be constant along the integral. In the case of the gas density obtained

from the SZ map, it is an exact statement, provided we assume isothermality. Since clusters in general are not too far from isothermality, this hypothesis is reasonable.

The strength of the perturbation method we propose is the fact that we do not need to assume isothermality and sphericity (or ellipsoidality). This might be of importance for further applications. An interesting example is the measurement of the Hubble constant from joint SZ and X-ray measurements. As it has been stressed by Inagaki et al. (1995); Roettiger et al. (1997); Puy et al. (2000), both the asphericity and the non-isothermality of the relevant clusters can yield important biases in the estimate of  $H_0$  (up to 20%). Our approach may be relevant to address this issue.

Although the comparison with simulated clusters is conclusive, our perturbative method has two shortcomings:

- We implicitly assume an equivalent degree of asymmetry for the physical quantities involved, i.e. mainly the gas pressure and DM potential. If perturbations of spherical models is produced by incoming filaments, as discussed above, this assumption is reasonable. However, this particular point might require more detailed study.
- We obtain good results by assuming an isothermal distribution. In fact, although the difference is small, it turns out that the underlying distribution is closer to a polytropic one (compatible with the results of Markevitch 1998). This means that the overall baryonic content is well approximated if we assume a (wrong) isothermal profile but that we would fail to reproduce precisely the underlying distributions, even if the total mass of each components is very well estimated.

Note finally that in the previous sections, we chose to predict the X-ray brightness map from SZ and WL data instead of predicting SZ maps from WL and X-ray. Since X-ray maps have higher resolution observations than SZ or WL, this way to proceed may be questionable (this situation will remain unchanged even with future SZ experiments). In fact, SZ is the most robust observable. It only depends on the pressure, which is a very smoothly varying quantity and its emission model is fairly simple, in contrast to the X-ray one. Moreover, it probes better the outer part of the cluster, i.e. it is less concentrated than the X-ray emission.

## 5.2. The equivalent spheroidal symmetry case

So far, we have discussed the perturbed spherical symmetry case. If we turn to spheroidal symmetry, the problem is similar provided we know the inclination angle  $i$  between the polar axis of the system and the line of sight. In the appendix we review the basic results of spheroidal deprojections. It is directly inspired from (Fabricant et al. 1984): once the projection is well parameterized we get

the projected quantity, like the pressure:

$$y(\eta) = 2 \frac{B_e}{R} \int_{\eta}^{\infty} \frac{P_{g,0}(t) t dt}{(t^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (66)$$

$$P_{g,0}(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{R}{B_e} \int_t^{\infty} \frac{P'_{g,0}(\eta) d\eta}{(\eta^2 - t^2)^{1/2}}, \quad (67)$$

following the notations of the appendix. Since we are dealing with the same Abel integral we can proceed in two steps as we did before.

Even if the inclination angle is a priori not accessible directly through single observations, it is possible to evaluate it using the deprojection of an axially symmetric distribution of either X-ray/SZ maps or SZ/surface density maps (Zaroubi et al. 1998; Zaroubi et al. 2000). Our method overcomes this problem since it only focusses on 2-D quantities and avoids as much as possible to deal with the full 3-D structure. However, in principle the method can also reconstruct 3-D quantities. This will be discussed in a forthcoming work. Note also that axially symmetric configuration elongated along the line of sight may appear spherical. This is a difficult bias to alleviate without any prior knowledge of the profile. In our case, our method will be biased in the sense that the deprojected profile will be wrong. Nevertheless, we might hope to reproduce properly global quantities, like abundance of DM or gas and so to alleviate some well known systematics (see previous section), e.g. in measuring the baryon fraction.

## 5.3. Application to true data

When applying the method to true data, the instrumental noise issue is an important matter of concern. The distinct advantage of a parametric approach, e.g. using a  $\beta$ -model, is that it fits the relevant parameters, e.g.  $r_c$  and  $\beta$ , on the projected quantities (the image) itself, which is rather insensitive to noise. However, it might be difficult to determine the profile and its derivative by a direct deprojection. In our perturbative approach, as it first relies on a zeroth order quantity found by averaging over some annulus, a noise reduction step (at least far from the center) prior to working on a projected perturbation should be quite robust as well. Nevertheless, this problem is not critical and can be addressed easily by using a more sophisticated technique than the mere use of Abel's integral. In particular we could decompose the profile into a function basis whose projection is known analytically (see for example Durret et al. 1999 in another context).

## 6. Conclusion

Trying to answer the question of how to coanalyse a set of WL and SZ data, we have presented and demonstrated the efficiency of an original method allowing us to perform in a self-consistent manner the joint analysis of these data. Using it on noise-free simulations, we demonstrated how well it can be used to make predictions of X-ray surface brightness. We discussed also in the previous sections

some shortcomings that do not seem critical but definitely require further work.

Compared to other, we choose to hide the deprojection by using appropriate approximations. Thus, we do not resolved fully the 3- $D$  structure of clusters, although this work is a first step towards a full deprojection (Doré et al. 2001, *in preparation*).

Nevertheless, since it is based on a self-consistent use of general physical hypotheses, the X-ray emission prediction of our method when compared to the observed one constitutes an interesting test of these hypotheses, namely the stationarity, the hydrostatic equilibrium and the validity of the equation of state.

This method is furthermore of interest since it should allow a better treatment of systematics (asphericity, non isothermality, ...) plaguing any measure of the baryon fraction  $f_b$  or the Hubble constant  $H_0$  using X-ray and SZ the effect (Inagaki et al. 1995). Thus we plan to apply it soon on true data.

*Acknowledgements.* We are grateful to our referee, M. Bartelmann, and to S. Dos Santos, G. Mamon and S. Zaroubi for valuable discussions. We thank J. Calstrom et al. for allowing the use of some of their SZ images.

### Appendix: Deprojection in spheroidal symmetry

In this appendix we recall some useful results concerning spheroid projection derived by Fabricant, Gorenstein and Rybicki (Fabricant et al. 1984). In the context of spheroidal systems, cartesian coordinates system are the most convenient for projection. Thus, if the observer's coordinate system  $(x, y, z)$  is chosen such that the line of sight is along the  $z$  axis and such that the polar axis of the spheroidal system  $z'$  lies in the  $x - z$  plane at an inclination angle  $i$  to the  $z$ -axis, then, in the cartesian coordinate system  $(x', y', z')$  the general physical quantities relevant to our problem depends only on the parameter  $t$  defined by

$$t^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{B_e^2} + \frac{z'^2}{A_e^2} \quad (68)$$

$$= \frac{(x \cos i + y z \sin i)^2 + y^2}{B_e^2} + \frac{(z \cos i - x \sin i)^2}{A_e^2}. \quad (69)$$

If we project a physical quantity  $G(t)$  on the observer sky plane  $x - y$  then,

$$I(x, y) = I(\eta) \quad (70)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) dl \quad (71)$$

$$= 2 \frac{B_e}{R} \int_{\eta}^{\infty} \frac{G(t) t dt}{(t^2 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (72)$$

where

$$\eta^2 \equiv \frac{x^2}{(RA_e)^2} + \frac{y^2}{(B_e)^2} \quad (73)$$

$$\text{and } R \equiv \sqrt{\frac{B_e^2}{A_e^2} \cos^2 i + \sin^2 i}. \quad (74)$$

Of course this result shows that if we were to observe a spheroidal system we would map ellipses with an axial ratio equal to  $\frac{B}{A} = \frac{1}{R} \frac{B_e}{A_e}$ . But the main result of this appendix is that we obtain at the end an Abel integral similar to the one obtained in the case of spherical system, where the radius as been replaced by the parameter  $t$ . This simple fact justifies the very analogous treatment developed in this paper for spherical and spheroidal systems.

### References

- Bartelmann, M., & Schneider, P. 2001, Phys. Rep., 340, 291
- Binney, J., & Tremaine, S. 1987 (Princeton University Press)
- Birkinshaw, M. 1999, Phys. Rep., 310, 97
- Cavaliere, A., & Fusco-Femiano, R. 1976, A&A, 49, 137
- Castander, F. J., et al. 2000, in Constructing the Universe with clusters of galaxies, ed. F. Durret, & D. Gerbal
- Chièze, J., Alimi, J. & Teyssier, R. 1998, ApJ, 495, 630
- Désert, F.-X., et al. 1998, New Astron., 3, 655
- Doré, O., et al. 2000, in Constructing the Universe with clusters of galaxies, ed. F. Durret, & D. Gerbal
- Durret, F., Gerbal, D., Lobo, C., & Pichon, C. 1999, A&A, 343, 760
- Fabian, A. C., et al. 1981, ApJ, 248, 47
- Fabricant, D. Rybicki, G., & Gorenstein, P. 1984, ApJ, 286, 186
- Holder, G., & Carlstrom, J. 1999, in Microwave Foregrounds, ed. A. de Oliveira-Costa, & M. Tegmark, ASP Conf. Ser., 181
- Holder, G., et al. 2000, in Constructing the Universe with clusters of galaxies, ed. F. Durret, & D. Gerbal
- Grego, L., et al. 2000, ApJ, 539, 39
- Inagaki, Y., Sugimotohara, T., & Suto, Y. 1995, PASJ, 47, 411
- Markevitch, M. 1998, ApJ, 504, 27
- Mellier, Y. 2000, ARA&A, 37, 127
- Puy, D., et al. [astro-ph/0009114]
- Rephaeli, Y. 1995, ARA&A, 33, 541
- Reblinsky, K., & Bartelmann, M. [astro-ph/9909155]
- Reblinsky, K. 2000, Ph.D. Thesis at Ludwig Maximilians Universität München
- Reese, E. D., et al. 2000, ApJ, 533, 38
- Refregier, A., & Teyssier, R., submitted to Phys. Rev. D [astro-ph/0012086]
- Roettiger, K., Stone, J., & Mushotzky, R. F. 1997, ApJ, 482, 588
- Sarazin, C. L. 1988, X-ray emission from clusters of galaxies (Cambridge University Press)
- Sunyaev, R., & Zel'dovich, I. 1972, Comments Astrophys. Space Phys., 4, 173
- Sunyaev, R., & Zel'dovich, I. 1980, ARA&A, 18, 537
- Teyssier, R., Chièze, R., & Alimi, J. 1997, ApJ, 480, 36
- Yoshikawa, K., & Suto, Y. 1999, ApJ, 513, 549
- Zaroubi, S., et al. 1998, ApJ, 500, L87
- Zaroubi, S., et al. [astro-ph/0010508]
- Zel'dovich, I., & Sunyaev, R. 1969, Astrophys. Space Sci., 4, 301

